Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Második (2003. május 19) — megoldásvázlatok

1. Nem. Az f elem triviálisan hat a második normálosztón, az elsőn azonban nem, hiszen felcseréli a t és tf elemeket.

2. Igaz. Mindkét Sylow normálosztó: az 5-Sylow indexe 1 vagy 7 lehet, de 7 nem kongruens 1-gyel modulo 5 (2 pont), a 7-Sylow indexe ugyanígy nem lehet sem 5, sem 25 (2 pont). Tehát a csoport a két Sylowjának a direkt szorzata (1 pont), és mindkettő kommutatív, mert rendjük prím illetve prímnégyzet (1 pont).

3. Tekintsük azt a $\varphi : D_5 \to \mathrm{Aut}(N)$ homomorfizmust, ami a forgatásokon az identitás, a tükrözések mindegyikén pedig az az α automorfizmus, amely N két másodrendű elemét, mondjuk a-t és b-t megcseréli, a harmadikat, c-t pedig fixen hagyja (3 pont). (Könnyű meggondolni, hogy lényegében ez az egyfajta szemidirekt szorzat van csak, ahol H nem normálosztó). Ennek a szemidirekt szorzatnak a centruma kételemű lesz: az egységelemen kívül még a c elem (pontosabban a $(c, 1)$ pár) van benne. Valóban, a c elemen nyilván H is és N is triviálisan hat. Tegyük fel, hogy az (n, h) pár benne van a centrumban. Legyen $t \in D_5$ egy rögzített tükrözés. Ha az $(1, t)$-vel konjugáljuk az (n, h) elemet, akkor $(\alpha(n), tht^{-1})$ adódik. Tehát $\alpha(n) = n$ és $th = ht$. Ez minden ilyen t-re igaz, vagyis $h = 1$ és $n \in \{1, c\}$ (3 pont).

4. Az eredmény K. Valóban, $[K, S_4]$ normálosztó S_4-ben, és része K-nak, de $[K, S_4] \neq 1$, mert akkor K az S_4 centrumában lenne. Mivel K minimális normálosztó, $[K, S_4] = K$.

5. Nincs. Legyen P a G csoport 5-Sylowja, akkor P normálosztó G-ben, mert indexe 4, és a 4 osztói közül csak az 1 kongruens 1-gyel modulo 5 (3 pont). Ekkor P tranzitív (hiszen G primitív), de akkor 10 osztaná P rendjét, ami 25 (3 pont).

6. Tudjuk, hogy ha $G \leq S_X$ egy Frobenius-csoport, akkor az N mag (reguláris) normálosztó, melynek elemszáma ugyanaz, mint X elemszáma, azaz a csoport foka. Legyen H az $x \in X$ stabilizátora, ekkor $G = HN$ és $H \cap N = \{1\}$. Tanultuk, hogy ekkor H ugyanúgy hat $X - \{x\}$-en, mint $N - \{1\}$-en konjugálással. A 2-tranzitivitás miatt ez a hatás tranzitív, és így $N - \{1\}$ minden elemének rendje ugyanaz a prím, vagyis $|N|$ prímhatvány.