Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Első zárthelyi (2003. ápr. 9) — megoldásvázlatok

1. Például $\mathbb{Z}_4^+$ ilyen, hiszen ebben minden páratlan számmal lehet osztani, így modulus R felett, és a legkisebb nemtriviális részmodulusa $\{0, 2\}$. *Második megoldás:* Gyakorlaton láttuk, hogy R összes ideálja $R \supset (2) \supset (4) \supset \cdots \supset (2^k) \supset \cdots \supset 0$. Ezért az ${}_RR$ modulusnak ${}_RR/(2^k)$ szubdirekt irreducibilis faktora, ami nem egyszerű, ha $k > 1$. Persze ${}_RR/(4)$ additív csoportja pont $\mathbb{Z}_4^+$ lesz.

2. Legyen I injektív, $I = A \oplus B$, és $\alpha : C \to D$ injektív. Ha $\varphi : C \to A$, akkor I injektivitása miatt létezik $\psi : D \to I$, hogy $\psi\alpha = \varphi$. Legyen π az I projekciója A-ra, ekkor $\pi\psi : D \to A$ megfelelő lesz, mert $\pi\psi\alpha = \pi\varphi = \varphi$, hiszen π az identitás A-n, és $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq A$.

3. Jó például a $\psi : \mathbb{Z}_2^+ \to \mathbb{Z}_2^+$ identikus leképezés, mert $1 \otimes 1 \in \mathbb{Z}^+ \otimes \mathbb{Z}_2^+ \neq 0$, de $\varphi \otimes \psi$-nél vett képe $2 \otimes 1$, ami $\mathbb{Z}^+ \otimes \mathbb{Z}_2^+$-ban nulla.

4. Az eredmény a négyelemű Boole-algebra lesz, vagyis csak a négy triviális normálosztó van: $\{(1,1)\}$, A_5^2, $\{1\} \times A_5$ és $A_5 \times \{1\}$. Ha ugyanis N normálosztó, akkor mindkét vetülete normálosztó A_5-ben, ami egyszerű csoport. Ha valamelyik, például az első vetület $\{1\}$, akkor $N \leq \{1\} \times A_5$, és így N a felsoroltak egyike. A fennmaradó eset az, ha N szubdirekt részcsoport. Gyakorlaton láttuk, hogy ekkor N vagy A_5^2, vagy egy $\varphi : A_5 \to A_5$ automorfizmus gráfja. Ez utóbbi azonban nem normálosztó, mert ha az lenne, akkor $(g, \varphi(g))$-t (g, h)-val konjugálva $(g, h\varphi(g)h^{-1})$ adódik, ami tehát szintén φ gráfjának eleme, vagyis $h\varphi(g)h^{-1} = \varphi(g)$. Ez minden g, h-ra igaz, és így A_5 kommutatív lenne.

5. A gyűrű véges, azaz Artin, így a radikál a legnagyobb nilpotens ideál. S ideáljait f-nek a g osztói generálják, ezek 1, $x+1$, x^2+1, x^2+x+1, $(x^2+x+1)(x+1)$ és f. Ha (g) nilpotens, akkor $f \mid g^k$ alkalmas k-ra. Tehát a radikál $((x^2+x+1)(x+1))/(f)$. (Ez úgy is kijönne, hogy a maximális ideálok metszetét tekintjük, a maximális ideálokat $x+1$ és x^2+x+1 generálja.) A radikál szerinti faktor tehát $2^3 = 8$ elemű. Mivel S kommutatív, a radikál szerinti faktor testek direkt szorzata, és egyben a $\mathbb{Z}_2[x]/(x+1)$ és a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrűk szubdirekt szorzata (e két faktorgyűrű a kételemű és a négyelemű test). Az elemszám miatt a teljes direkt szorzatról van szó (de ez közvetlenül is kiszámolható a kínai maradéktétellel). Tehát $S/J(S) \cong \mathrm{GF}(2) \times \mathrm{GF}(4)$.

6. Az U, V és W alterek által generált részháló homomorf képe a három elemmel generált szabad moduláris hálónak. E szabad moduláris hálóban az

$$[(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$$

intervallum (e háló rajzából leolvashatóan) M_3-mal izomorf. Mivel M_3 egyszerű háló, a homomorf képben ez az intervallum vagy összeesik (és ekkor a feladatban szereplő különbség nulla), vagy pedig a képben is találunk egy M_3-mal izomorf részhálót, legyen ennek a középső három eleme az A_1, A_2, A_3 altér, a teteje $M = (U+V) \cap (U+W) \cap (V+W)$, az alja $N = (U \cap V) + (U \cap W) + (V \cap W)$. Nyilván M/A_i izomorf A_j/N-nel ha $i \neq j$, és így dimenziójuk egyenlő. De akkor az összes M/A_i és A_i/N dimenziója ugyanaz, a keresett $\dim M - \dim N$ pedig ennek kétszerese.