Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Első zárthelyi (2003. ápr. 9)

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, és a **szerző** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *Legyen R a páratlan nevezőjű racionális törtek gyűrűje. Adjunk meg R felett egy szubdirekt irreducibilis modulust, ami nem egyszerű.*

2. *Mutassuk meg, hogy injektív modulus direkt összeadandója is injektív.*

3. *Legyen $\varphi(x) = 2x$ mint $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ homomorfizmus. Léteznek-e olyan A, B Abel-csoportok, és olyan $\psi : A \to B$ injektív homomorfizmus, melyre $\varphi \otimes \psi$ nem injektív?*

4. *Számítsuk ki az A_5^2 csoport normálosztóhálóját.*

5. *Legyen $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$. Határozzuk meg az $S = Z_2[x]/(f)$ gyűrű radikálját, és állapítsuk meg, mely teljes mátrigyűrűk szerepelnek a radikál szerinti faktor felbontásában.*

6. *Legyenek U, V, W alterei egy véges dimenziós vektortérnek. Mutassuk meg, hogy*

$$\dim\Big((U+V)\cap(U+W)\cap(V+W)\Big) - \dim\Big((U\cap V)+(U\cap W)+(V\cap W)\Big)$$

nemnegatív páros szám.