Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév
Hetedik feladatsor (2003. április 23)

1. *Bizonyítsuk be, hogy a feloldható csoportok osztálya zárt a részcsoportképzésre, a faktorcsoport képzésére, és a véges sok tényezős direkt szorzat képzésére.*

2. *Hasson a G csoport az X halmazon, és legyen $\varphi_g(x) = g * x$. Bizonyítsuk be, hogy $g \mapsto \varphi_g$ homomorfizmusa G-nek S_X-be. Ennek a magját* **a hatás magjának** *nevezzük.*

3. *Legyen H részcsoportja a G csoportnak, és definiáljuk G hatását a H szerinti bal mellékosztályokon a $g * (aH) = gaH$ képlettel. Igazoljuk, hogy hatást kaptunk, melynek magja a H konjugáltjainak a metszete.*

4. *Tegyük fel, hogy a G egyszerű csoportban van n-indexű részcsoport. Bizonyítsuk be, hogy G izomorf az S_n egy részcsoportjával.*

5. *Igazoljuk, hogy páratlan rendű csoport három indexű részcsoportja normálosztó.*

6. *Legyen H részcsoportja a G csoportnak, és $N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$ (ez a H* **normalizátora***). Igazoljuk, hogy $N_G(H)$ a legnagyobb olyan részcsoport, amiben H normálosztó, és hogy H-nak $|G : N_G(H)|$ darab konjugáltja van G-ben.*

7. *Legyen $X \subseteq G$. Mutassuk meg, hogy $C_G(X) \triangleleft N_G(X)$, és ha X részcsoport, akkor $C_G(X)/N_G(X)$ beágyazható X automorfizmuscsoportjába.*

8. *Melyik ismert csoporttal izomorf az S_4 csoport 2-Sylow részcsoportja?*

9. *Határozzuk meg az alábbi csoportok Sylow-részcsoportjainak a számát: S_3, D_n, S_4, A_5.*

10. *Igazoljuk, hogy nincs 200, 204, 260, 56 rendű egyszerű csoport.*

11. *Egy véges csoport Cayley-reprezentációjában mely elemeknek lesz páratlan permutáció a képe? Mutassuk meg, hogy ha a G csoport 2-Sylowja ciklikus, akkor G nem egyszerű.*

12*. *Igazoljuk, hogy nincs 120, 180**, 312, 616, 1960 rendű egyszerű csoport.*

13*. *Igazoljuk, hogy ha p, q, r páronként különböző prímek, akkor nincs pqr rendű egyszerű csoport.*

14.** *Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek, és $\alpha > 0$, akkor nincs $p^\alpha q$ rendű egyszerű csoport.*

15. *[Frattini-elv] Legyen $H \triangleleft G$ és P egy p-Sylowja H-nak. Igazoljuk, hogy $G = HN_G(P)$, és hogy $N_G(P)$ tartalmazza G egy p-Sylow részcsoportját.*

16. *Legyen P egy p-Sylow G-ben, és $N \triangleleft G$. Igazoljuk, hogy $P \cap N$ (egy) p-Sylowja N-nek, és NP/N (egy) p-Sylowja G/N-nek.*

17. *Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges G csoport belső automorfizmusai normálosztót alkotnak G automorfizmus-csoportjában.*

18*. *Bizonyítsuk be, hogy a két elemmel generált szabad csoportnak van olyan részcsoportja, amely izomorf a megszámlálhatóan generált szabad csoporttal.*

19***.** *Konstruáljunk végesen generált végtelen egyszerű csoportot. (Ötlet: tekintsük az $\langle x, y, z, t \mid xyx^{-1} = y^2,\ yzy^{-1} = z^2,\ ztz^{-1} = t^2,\ txt^{-1} = x^2 \rangle$ definiáló relációkkal megadott csoportot. Igazoljuk, hogy ez nem egyelemű, de minden véges faktora az).*