Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hatodik feladatsor (2003. április 2)

1. *Melyek modulárisak a IV/1. feladatban lerajzolt hálók közül?*

2. *Mutassuk meg, hogy a moduláris hálók varietást alkotnak, ami önduális. Vezessük le a disztributív azonosságból a moduláris szabályt.*

3. *Igazoljuk, hogy komplementumos moduláris háló intervalluma is komplementumos.*

4. *Mutassuk meg, hogy moduláris hálóban nem lehet egy elemnek két különböző összehasonlítható komplementuma.*

5. *A valós projektív síkon tekintsük a pontok, és az egyenesek halmazát. Mutassuk meg, hogy ezek az üres halmazzal és az egész síkkal kiegészítve moduláris hálót alkotnak. Egyszerű ez a háló? Négy általános helyzetű pont hány elemű részhálót generál?*

6. *Mutassuk meg, hogy ha egy véges hálóban a magasságfüggvény teljesíti a dimenzió-egyenlőséget, akkor a háló moduláris.*

7. *Igazoljuk, hogy az intervallum-izomorfizmus tétel csak moduláris hálóban érvényes.*

8*. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges moduláris hálóban a nullát fedő elemek (azaz az atomok) egyesítése* 1, *akkor a háló komplementumos.*

9*. *Bizonyítsuk be a Jordan-Dedekind tételt.*

10. *Igazoljuk, hogy ha a G csoport direkt négyzetének részcsoporthálója moduláris, akkor G-ben minden részcsoport normálosztó.*

11. *Bizonyítsuk be, hogy minden halmaz partícióhálója komplementumos.*

12.** *Bizonyítsuk be, hogy minden halmaz partícióhálója egyszerű.*

---

13. *Igazoljuk, hogy Boole-algebrában $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ és $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.*

14. *Mutassuk meg, hogy minden szubdirekt irreducibilis Boole-algebra kételemű.*

15. *Mutassuk meg, hogy a Boole-algebrák varietása kongruencia-felcserélhető.*

16. *Határozzuk meg a végesen generált szabad Boole-algebrák elemszámát.*

17. *Legyen F az $\{x, y, z\}$ generálta szabad algebra egy V varietásban.*

a) Legyen $\varphi : F \to F$ az az endomorfizmus, melyre $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = x$, $\varphi(z) = z$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Ker}(\varphi)$ a legszűkebb olyan kongruencia, melynél x és y kongruens.

b) Tegyük fel, hogy $m \equiv z$ ennél a kongruenciánál, és $m = t^F(x, y, z)$ egy t termre. Bizonyítsuk be, hogy V-ben teljesül a $t(x, x, z) = z$ azonosság.

c) Mutassuk meg, hogy ha V kongruencia-felcserélhető, akkor van Malcev-termje.

18. *Bizonyítsuk be, hogy ha A a B és C algebrák szubdirekt szorzata egy kongruencia-felcserélhető varietásban, akkor van olyan θ kongruencia B-n, és olyan ψ kongruencia C-n, valamint egy $\varphi : B/\theta \to C/\psi$ izomorfizmus úgy, hogy $A = \{(b, c) \mid \varphi(b/\theta) = c/\psi\}$.*

19*.** *Mutassuk meg, hogy ha egy varietásban a véges algebrák között csak véges sok direkt irreducibilis van, akkor a varietás véges algebrái kongruencia-felcserélhetőek.*