Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév
Ötödik feladatsor (2003. március 26)

Legyen L háló. Ha $a \leq b \in L$, akkor $\{c \in L : a \leq c \leq b\}$ az $[a, b]$ *intervallum.* A $c, d \in [a, b]$ *relatív komplementumok* $[a, b]$*-ben,* ha $c \vee d = b$ és $c \wedge d = a$. A komplementum a $[0, 1]$-re vett relatív komplementum. Egy részhalmaz *konvex,* ha bármely két összehasonlítható eleme közötti intervallumot is tartalmazza. Az $I \subseteq L$ *ideál,* ha egyesítésre zárt, és *leszálló,* azaz minden $b \in I$-re a b-nél kisebb elemeket is tartalmazza. A *filter* a duális fogalom. Egy ideál *prímideál,* ha a komplementere filter, a duális fogalom az *ultrafilter.*

1. *Melyek disztributívak IV/1. feladatban lerajzolt hálók közül?*

2. *Vezessük le mindkét disztributív szabályból a másikat.*

3. *Tegyük fel, hogy I ideálja, F pedig filtere az L disztributív hálónak. Legyen $(a, b) \in \theta_I$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x \in I$, melyre $a \vee x = b \vee x$, és ψ_F a duális fogalom.*
 a) Bizonyítsuk be, hogy θ_I kongruencia, amelynek I osztálya.
 b) Igazoljuk, hogy ha $x \in I$ és $y \in F$ esetén mindig $x \leq y$, akkor $\theta_I \cap \psi_F = 0_L$.
Keressük meg ennek alapján a szubdirekt irreducibilis disztributív hálókat.

4. *Mutassuk meg, hogy disztributív hálóban a maximális kongruenciák pontosan a prímideáloknak felelnek meg, és minden ideál része egy prímideálnak.*

5. *Igazoljuk, hogy disztributív hálóban a komplementum, ha létezik, akkor egyértelmű.*

6. *Legyen $M(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ és $m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ (felső és alsó mediáns). Igazoljuk az alábbiakat.*
 a) Mindkét mediáns többségi term, és tetszőleges hálóban $m \leq M$.
 b) Egy L háló pontosan akkor disztributív, ha bármely három elemnek megegyezik az alsó és felső mediánsa.

---

7. *Határozzuk meg a szubdirekt irreducibilis Abel-csoportokat.*

8. *A $\mathbb{C}[x]$ gyűrűt, illetve a páratlan nevezőjű törtek gyűrűjét bontsuk fel szubdirekt irreducibilisek szubdirekt szorzatára.*

9. *Fogalmazzuk meg és lássuk be az általános homomorfizmus- és két izomorfizmus-tételt.*

10. *Igazoljuk az $\mathbf{SH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HS}(\mathcal{K})$, $\mathbf{PS}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{SP}(\mathcal{K})$, $\mathbf{PH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HP}(\mathcal{K})$ összefüggéseket.*

11*. *Mi lesz a $\mathbb{Z}^+$ csoport illetve a $\mathbb{Z}$ gyűrű által generált varietás?*

12. *Adjunk struktúratételt az $x^2 = x$ azonossággal definiált gyűrűvarietás véges elemeire.*

13.** *Határozzuk meg az S_3 csoport által generált varietás szubdirekt irreducibiliseit.*

14.** *Bizonyítsuk be, hogy a Q illetve a D_4 csoportok ugyanazt a varietást generálják, és adjuk meg ezt a varietást véges sok azonossággal.*

---

15. *Mutassuk meg, hogy a három elemmel generált szabad háló végtelen. Rajzoljuk le az x, y, z elemekkel generált, $x \vee y = y$ (azaz $x \leq y$) definiáló relációval megadott hálót.*

16. *Bizonyítsuk be, hogy minden végesen generált disztributív háló véges. Adjunk alsó és felső becslést az n elemmel generált disztributív háló elemszámára.*