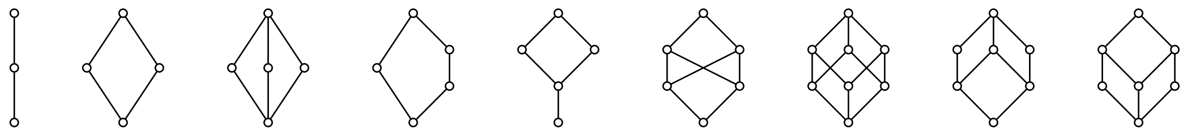
Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Negyedik feladatsor (2003. március 19)

1. *Döntsük el az alábbi részben rendezett halmazokról, hogy hálók-e. Amelyek hálók, azoknak rajzoljuk le a kongruenciahálóját és a részháló-hálóját. Melyek lesznek egyszerűek? Adjuk meg a második hálónak az elsőbe menő rendezéstartó leképezéseit, és válogassuk ki ezek közül a háló-homomorfizmusokat. Mindegyik lerajzolt hálóban keressünk minimális elemszámú generátorrendszert.*



2. *Mutassuk meg, hogy egy háló-kongruencia minden osztálya konvex részháló.*

3. *Igazoljuk, hogy egy* $\equiv$ *ekvivalencia-reláció pontosan akkor háló-kongruencia, ha minden* c*-re* $a \equiv b$*-ből* $a \vee c \equiv b \vee c$ *és* $a \wedge c \equiv b \wedge c$ *következik. Általánosítsuk ezt tetszőleges algebrára. Mutassuk meg, hogy az egyváltozós polinomok megőrzik a kongruenciákat.*

4. *Határozzuk meg egy általános modulus illetve kommutatív gyűrű összes termjét és polinomját.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\mathbf{A}$ *algebrában az* $a_1, \ldots, a_n$ *elemek által generált részalgebra a* $t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ *alakú elemekből áll, ahol* t *befutja az adott típusú* n*-változós termeket.*

---

6. *Hány kétváltozós művelet van egy négyelemű halmazon?*

7. *Írjuk fel az alábbi műveletek szorzástábláit, és osztályozzuk a megfelelő struktúrákat aszerint, hogy izomorfak-e: az* $\{1, i, -1, -i\}$ *számok a szorzásra;* $\mathbb{Z}_4^+$*;* $\mathbb{Z}_8^\times$*;* $\mathbb{Z}_5^\times$*; a* $\{0, 2, 4, 6\}$ *halmaz a modulo* 8 *összeadásra illetve szorzásra; a* $\{0, 4, 8, 12\}$ *halmaz a modulo* 16 *összeadásra illetve szorzásra; a* $\{3, 9, 27, 81\}$ *halmaz a modulo* 81 *szorzásra; egy kételemű halmaz összes önmagába menő leképezése a kompozícióra; egy négyelemű halmaz összes önmagába menő* **konstans** *leképezése a kompozícióra; egy téglalap illetve rombusz összes szimmetriája a kompozícióra; egy kételemű halmaz összes részhalmaza az unióra, a metszetre, illetve a szimmetrikus differenciára; a* $\mathbb{Z}_2$ *feletti összes polinomfüggvények a szorzásra; az* $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ *halmaz az* $(a, b) * (c, d) = (a, d)$ *műveletre; a* $\{0, 1, 2, 3\}$ *halmaz a* min *illetve* max *műveletekre.*

8. *Az előző feladatban szereplő struktúráknak számítsuk ki az összes részstruktúráit, és az összes kongruenciáit. Melyek bonthatók fel nemtriviális módon direkt szorzatra, és melyek generálhatók egy elemmel? Keressünk olyan négyelemű félcsoportokat, amelyek a felsoroltak egyikével sem izomorfak.*

9*. *Van-e négyelemű egyszerű félcsoport?*

10*. *Írjuk le az egyszerű, kommutatív félcsoportokat.*

11*. *Igazoljuk, hogy ha egy nullelemes véges félcsoportban minden elem alkalmas hatványa nulla, akkor minden elég hosszú szorzat nulla.*

12*. *Van-e olyan kétváltozós művelet egy négyelemű halmazon, hogy a kapott struktúrának csak egy részalgebrája és két kongruenciája legyen (a triviálisak)?*