Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Harmadik feladatsor (2003. március 12)

A feladatsoron minden gyűrű egységelemes. Egy modulus *teljesen reducibilis*, ha egyszerű részmodulusok összege. Az M modulus M_α ($\alpha \in A$) részmodulusai *függetlenek*, ha összegük direkt összeg (azaz bármelyiknek a többi összegével vett metszete nulla).

1. *Határozzuk meg az alábbi gyűrűk radikálját: egy főideálgyűrű egy faktorgyűrűje; a páratlan nevezőjű törtek; a 2-hatvány nevezőjű törtek; a komplex felső háromszögmátrixok.*

2. *Mutassuk meg, hogy a radikálban csak a nulla lehet idempotens elem.*

3. *Igazoljuk, hogy minden véges gyűrű kommutatív, melyben igaz az $x^n = x$ azonosság.*

4. *Legyen M baloldali R-modulus, $D = \mathrm{End}_R(M)$, és D^* a D-ből a szorzás megfordításával kapott gyűrű: $r * s = sr$. Igazoljuk, hogy M egy $R - D^*$ bimodulussá válik az $m\varphi = \varphi(m)$ definícióval (azaz M jobboldali D^*-modulus, és az $(rm)\varphi = r(m\varphi)$ azonosság is teljesül tetszőleges $r \in R$, $m \in M$ és $\varphi \in D$ esetén).*

5. *Legyen D ferdetest, és D^* a D-ből a szorzás megfordításával kapott gyűrű. Ha $v \in D^n$ és $\lambda \in D$, akkor a $v\lambda$ szorzatot értelmezzük komponensenként. Az $M = D^n$ Abel-csoportot tegyük bal modulussá a $D^{n\times n}$ mátrixgyűrű fölött a szokásos mátrix-vektor szorzásra. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{End}_R(M)$ elemei pontosan a $\varphi_\lambda : v \mapsto v\lambda$ alakú leképezések, és így a $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ megfeleltetés izomorfizmus $\mathrm{End}_R(M)$ és D^* között.*

6. *Legyen az M modulus az M_α ($\alpha \in A$) egyszerű részmodulusainak összege, és N egy részmodulusa M-nek. Mutassuk meg, hogy van olyan $B \subseteq A$, hogy M_β ($\beta \in B$) függetlenek, és ha (direkt) összegüket K jelöli, akkor $M = N \oplus K$.*

7. *Legyen M az M_α ($\alpha \in A$) egyszerű részmodulusainak összege. Bizonyítsuk be, hogy*

a) M minden része és faktora is teljesen reducibilis, és minden része direkt összeadandó;

b) M minden egyszerű része illetve faktora izomorf valamelyik M_α modulussal.

8. *Legyen R egyszerű gyűrű, melynek van egy J minimális balideálja. Igazoljuk, hogy ${}_RR$ teljesen reducibilis modulus, és minden egyszerű R-modulus izomorf ${}_RJ$–vel.*

9. *Legyen az R gyűrű k darab ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű direkt szorzata. Mutassuk meg, hogy R felett pontosan k darab nemizomorf egyszerű modulus van.*

10. *Mutassuk meg, hogy az R gyűrűre az alábbiak ekvivalensek:* (1) *minden R-modulus projektív (injektív);* (2) *minden R-modulus minden részmodulusa direkt összeadandó;* (3) *minden R-modulus teljesen reducibilis;* (4) *az R féligegyszerű Artin-gyűrű.*

11. *Igazoljuk, hogy ha x eleme a radikálnak, akkor $1-x$-nek van jobbinverze is. Mutassuk meg, hogy a radikál nem függ attól, hogy bal- vagy jobboldali modulusokkal definiáljuk, és hogy féligegyszerű gyűrű esetén a bal- és jobboldali Artin-tulajdonság is ekvivalens.*

12. *Legyen J maximális balideálja az R gyűrűnek, és I az R/J faktormodulus annullátora.*

a) Igazoljuk, hogy I a legnagyobb olyan ideálja R-nek, mely része J-nek.

b) Legyen $0 \neq u \in R/J$. Mutassuk meg, hogy u annullátora maximális balideál.

c) Mutassuk meg, hogy I előáll az R alkalmas, maximális balideáljainak metszeteként.

d) Vezessük le ebből, hogy R radikálja a maximális balideálok metszete.