Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Második feladatsor (2003. március 5)

1. *Számítsuk ki:* $\mathbb{Z}_n^+ \otimes \mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}_n^+ \otimes \mathbb{Z}_m^+$; $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Z}_n^+$; $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_n^+$; $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$. *Igaz-e:*

a) Osztható csoportnak bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata osztható.

b) Torziócsoport bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata torziócsoport.

c) Osztható csoportnak bármely torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.

d) Két szabad Abel-csoport tenzorszorzata is szabad.

e) Ha A tetszőleges Abel-csoport, akkor $\mathbb{Z}_n^+ \otimes A \cong A/nA$.

2. *Az I/***3.** *feladatban számítsuk ki az $A \otimes \varphi$ leképezéseket is.*

3. *Legyen R kommutatív egységelemes gyűrű és A, B, C, D baloldali unitér R-modulusok. Melyek igazak az alábbi izomorfizmusok közül?*

a) ${}_RR \otimes A \cong A$.

b) $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D)$.

c) $(A \times B) \otimes C \cong (A \otimes C) \times (B \otimes C)$.

d) $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$.

4. *Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Írjuk fel $V \otimes V$ alábbi elemeit a lehető legrövidebb alakban (azaz minél kevesebb tenzor összegeként).*

a) $(1,0) \otimes (2,4) + (2,0) \otimes (2,4) + (3,0) \otimes (1,2)$.

b) $(1,0) \otimes (1,0) + (1,0) \otimes (0,1) + (0,1) \otimes (1,0) + (0,1) \otimes (0,1)$.

c) $(1,0) \otimes (2,2) + (1,2) \otimes (2,1) + (0,1) \otimes (1,0)$.

5. *Ha A, B, C, D Abel-csoportok, $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ és $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$, akkor $\alpha \otimes \beta$ kétféleképpen értelmezhető: mint leképezések tenzorszorzata, és mint a $\mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D)$ egy eleme. Igazoljuk, hogy van olyan $\Psi : \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D) \to \mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D)$ homomorfizmus, ami a második értelmezéshez az elsőt rendeli, de Ψ általában se nem injektív, se nem szürjektív. (Ötlet: Tekintsük az $\alpha : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2}$ beágyazást.)*

6. *Legyen R kommutatív egységelemes gyűrű, $A \leq B$ és $C \leq D$ baloldali unitér R-modulusok. Jelölje U az $a \otimes c$ alakú elemek által generált részcsoportot $B \otimes D$-ben, ahol a befutja A-t és c befutja C-t.*

a) Mutassuk meg, hogy U homomorf képe $A \otimes C$-nek.

b) Igaz-e, hogy $B/A \otimes D/C \cong (B \otimes D)/U$?

c) Igaz-e, hogy U és $A \otimes C$ izomorfak?

d) Igaz-e, hogy U és $A \otimes C$ izomorfak, ha R test?

7. *Határozzuk meg a véges injektív és projektív modulusokat $\mathbb{Z}_n$ fölött.*

8*. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) projektív (injektív) modulus direkt összeadandója is az;

b) injektív modulusok direkt szorzata is az, és ennek a duálisát;

c) kommutatív gyűrű felett projektív modulusok tenzorszorzata is az;

d) főideálgyűrű fölött projektív $\iff$ szabad és injektív $\iff$ osztható.

9*.** *Mutassuk meg, hogy minden modulus beágyazható injektív modulusba. Segédállítás: ha A osztható Abel-csoport, akkor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ injektív R-modulus.*