Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Első alkalom (2003. február 17), KÉTOLDALAS FELADATSOR!

Ha A Abel-csoport és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $nA = \{na \mid a \in A\}$ és $A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$. Az A *torziócsoport,* ha minden eleme véges rendű; *torziómentes,* ha csak a 0 véges rendű; *szabad,* ha $\mathbb{Z}^+$ példányainak direkt összegével izomorf; *osztható*, ha az $nA = A$ minden $0 \neq n \in \mathbb{Z}$-re. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ a komplex p-hatványadik egységgyökök csoportja a szorzásra (p prím).

1. *Számítsuk ki a* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *és* $\mathrm{Hom}(B, A)$ *Abel-csoportokat, ha* (A, B) *rendre* $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}^+)$; $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_m^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ *(mint* $\mathbb{Z}$*-modulusok).*

2. *Igazoljuk az alábbi állításokat (*R *kommutatív,* A, B, C, D *unitér bal* R*-modulusok).*
 a) $\mathrm{Hom}({}_RR, A) \cong A$.
 b) $\mathrm{Hom}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C)$.
 c) $\mathrm{Hom}(A, C \times D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(A, D)$.

3. *Számítsuk ki* $A = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}^+$ *esetén* $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_A, \varphi)$*-t és* $\mathrm{Hom}(\varphi, \mathrm{id}_A)$*-t. Vizsgáljuk meg, hogyan függ össze* φ *és az eredmény injektivitása, illetve szürjektivitása.*
 a) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *az a homomorfizmus, ami minden elemhez az* n*-szeresét rendeli.*
 b) $\varphi : \mathbb{Z}_m^+ \to \mathbb{Z}_{nm}^+$, *az* n*-nel szorzás.*
 c) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}_n^+$ *a mod* n *vett maradék képzése.*
 d) φ *a* $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}^+$ *beágyazás.*

4. *Legyen* $\alpha : A \to B$ *modulushomomorfizmus. Igazoljuk, hogy* α *akkor és csak akkor szürjektív, ha jobbról szabad vele egyszerűsíteni, azaz tetszőleges* $\beta, \gamma : B \to C$ *homomorfizmusokra* $\beta\alpha = \gamma\alpha \implies \beta = \gamma$. *Fogalmazzuk meg a duális (azaz a nyilak megfordításával kapott) tulajdonságot. Mely* α *homomorfizmusokra teljesül az?*

5. *Tegyük fel, hogy az alábbi diagram sora egzakt.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & & \big\downarrow{\scriptstyle\eta} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

Igazoljuk, hogy pontosan akkor van olyan $\varphi : M \to A$ *homomorfizmus, ami a diagramot kommutatívvá teszi, ha* $\beta\eta = 0$, *és ilyenkor* φ *egyértelmű. Dualizáljuk az állítást.*

6. *Legyen* $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(A, B)$. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta)$ *pontosan akkor, ha tetszőleges* $\varphi : B \to C$ *homomorfizmusra* $\varphi\beta = 0 \implies \varphi\alpha = 0$. *Dualizáljuk az állítást.*

7. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\alpha : A \to B$ *homomorfizmus pontosan akkor képzi le* A*-t injektíven a* B *egy direkt összeadandójára, ha van balinverze. Dualizáljuk az állítást.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat, akkor tetszőleges M *modulusra az alábbiak is egzaktak:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_M, \alpha)} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_M, \beta)} \mathrm{Hom}(M, C)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}(B, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}(A, M)$$

9. *Adjunk példát arra, hogy* $\mathrm{Hom}(A,B)$*-n a természetes szorzás nem ad modulust.*

10. *Számítsuk ki az* $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_3^+,\mathbb{Z}_3^+)$ *csoportot a faktorrendszerek felírásával.*

11. *Tegyük fel, hogy az alábbi diagram kommutatív, és a sorai egzaktak. Igazoljuk, hogy*
a) *ha* γ_1 *epi, és* γ_2, γ_4 *mono, akkor* γ_3 *is mono;*
b) *ha* γ_5 *mono, és* γ_2, γ_4 *epi, akkor* γ_3 *is epi.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & A_5 \arrow[d, "\gamma_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

12. *Tegyük fel, hogy az alábbi diagram kommutatív, és mindhárom oszlopa egzakt. Bizonyítsuk be, hogy ha két szomszédos sora egzakt, akkor a harmadik is.*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\mu_1"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\mu_2"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

13. *Legyenek* M_i *algebrai struktúrák. Azt mondjuk, hogy az* F *az* $\alpha_i : M_i \to F$ *homomorfizmusokkal együtt az* M_i *struktúrák* **szabad szorzata,** *ha minden* N*-re és* $\beta_i : M_i \to N$ *homomorfizmusokra egyértelműen létezik egy* $\psi : F \to N$ *homomorfizmus úgy, hogy minden* i*-re* $\psi\alpha_i = \beta_i$*. Határozzuk meg a szabad szorzatot a modulusok között; a halmazok között (művelet nincs); illetve a csoportok között akkor, ha az összes tényező szabad.*

14. *Tegyük fel, hogy* $\alpha : A \to C$ *és* $\beta : B \to C$ *modulushomomorfizmusok. Azt mondjuk, hogy az* M *modulus a* $\gamma : M \to A$ *és a* $\delta : M \to B$ *homomorfizmusokkal az előbbi két homomorfizmus* **pullback***-je, ha* $\alpha\gamma = \beta\delta$*, és bármely kommutatív*

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\delta'"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "\beta"] & C
\end{tikzcd}$$

diagram esetén egyértelműen létezik egy $\psi : M' \to M$ *homomorfimus, melyre* $\gamma\psi = \gamma'$ *és* $\delta\psi = \delta'$*. Mutassuk meg, hogy a pullback mindig létezik és egyértelmű. Fogalmazzuk meg és igazoljuk az állítás duálisát is (a duális fogalmat* **pushout***-nak nevezzük).*