Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

II/B zárthelyi (2002. május 23) — megoldásvázlatok

1. Bontsuk fel a csoportot az alaptétel szerint, tehát minden elem mindegyik komponensének prímhatvány a rendje. Egy 20 rendű elemnek kell, hogy legyen 4 rendű komponense, viszont $\mathbb{Z}_{25}^+$ nem szerepelhet, mert akkor lenne 50 rendű elem. Ezért pontosan $\mathbb{Z}_{16}^+ \times \mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$, $\mathbb{Z}_8^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$, $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ és $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ lesz jó. Ezek az alaptétel egyértelműségi állítása miatt nem izomorfak.

2. Az eredmény $(4!)2^4 = 2^7 3$. Az orbit-stabilizátoros leszámlálással ez kijön; a lényeg az, hogy a tetraéder csúcsai 4!-féleképpen mozoghatnak, és minden csúcs körül a lelógványok függetlenül 2-féleképpen.

3. Ez a tizenkételemű D_6 csoporttal izomorf, hiszen a megadott két permutció egy forgatásnak és egy tengelyes tükrözésnek felel meg. Az elemek ennek alapján felsorolhatók: az (123456) hatványai mellett az (26)(35), (12)(36)(45), (13)(46), (23)(14)(56), (24)(15), (34)(25)(16) tükrözések szerepelnek.

4. Nem izomorfak, erre több indoklás is van. Az első faktorcsoport nem kommutatív, mert például f és t mellékosztályai nem felcserélhetők, a második pedig igen. Sőt, a második faktorcsoportban minden elem négyzete az egységelem, míg az elsőben például f mellékosztálya negyedrendű lesz. (Valójában az első faktor D_4, a második $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$.)

5. Nyolcelemű. A $\mathbb{Z}_8^+$ csoport $a = 0$ és $b = 1$ választással kielégíti a relációkat. Megfordítva, $bab^{-1} = a^2$, innen $ba^2b^{-1} = bab^{-1}bab^{-1} = a^2a^2 = 1$, tehát $a^2 = 1$, és így $1b = ba$ miatt $a = 1$.

6. Csak a harmadrendű ciklikus csoport és S_3 lesz megfelelő. Legyen az osztályegyenlet $a+b+1 = |G|$. Ekkor a és b is osztja $a+b+1$-et, tehát $a \mid b+1$ és $b \mid a+1$. Ha $a = b$, akkor $a \mid a+1$ miatt $a = 1$, és így $|G| = 3$. Ha nem, hanem például $a < b$, akkor $b \mid a+1 \le b$ csak úgy lehet, ha $b = a+1$, de ekkor $a \mid b+1 = a+2$ miatt $a \mid 2$, tehát $a = 1$ vagy $a = 2$. Az első esetben G rendje 4, a másodikban 6. Az első eset nem jó, mert akkor G Abel, és így négy konjugált osztálya van. A másik esetben a két hatelemű csoport közül a nemkommutatív megfelelő lesz.