Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

II/A zárthelyi (2002. május 23) — megoldásvázlatok

1. Bontsuk fel a csoportot az alaptétel szerint, tehát minden elem mindegyik komponensének prímhatvány a rendje. Egy 12 rendű elemnek kell, hogy legyen 4 rendű komponense, viszont $\mathbb{Z}_9^+$ nem szerepelhet, mert akkor lenne 18 rendű elem. Ezért pontosan $\mathbb{Z}_8^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ és $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ lesz jó. Ezek az alaptétel egyértelműségi állítása miatt nem izomorfak.

2. Az eredmény $(4!)(3!)^4 = 2^7 3^5$. Az orbit-stabilizátoros leszámlálással ez kijön; a lényeg az, hogy a tetraéder csúcsai 4!-féleképpen mozoghatnak, és minden csúcs körül a lelógványok függetlenül 3!-féleképpen.

3. Ez a tízelemű D_5 csoporttal izomorf, hiszen a megadott két permutció egy forgatásnak és egy tengelyes tükrözésnek felel meg. Az elemek ennek alapján felsorolhatók: az (12345) hatványai mellett az (12)(35), (23)(41), (34)(52), (45)(13), (51)(24) tükrözések szerepelnek.

4. Nem izomorfak, erre több indoklás is van. Az első faktorcsoport nem kommutatív, mert például f és t mellékosztályai nem felcserélhetők, a második pedig igen. Sőt, a második faktorcsoportban minden elem négyzete az egységelem, míg az elsőben például f mellékosztálya negyedrendű lesz. (Valójában az első faktor D_4, a második $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$.)

5. Négyelemű. A $\mathbb{Z}_4^+$ csoport $a = 0$ és $b = 1$ választással kielégíti a relációkat. Megfordítva, $bab^{-1} = a^2$, innen $ba^2b^{-1} = bab^{-1}bab^{-1} = a^2a^2 = 1$, tehát $a^2 = 1$, és így $1b = ba$ miatt $a = 1$.

6. Csak a harmadrendű ciklikus csoport és S_3 lesz megfelelő. Legyen az osztályegyenlet $a+b+1 = |G|$. Ekkor a és b is osztja $a+b+1$-et, tehát $a \mid b+1$ és $b \mid a+1$. Ha $a = b$, akkor $a \mid a+1$ miatt $a = 1$, és így $|G| = 3$. Ha nem, hanem például $a < b$, akkor $b \mid a+1 \leq b$ csak úgy lehet, ha $b = a+1$, de ekkor $a \mid b+1 = a+2$ miatt $a \mid 2$, tehát $a = 1$ vagy $a = 2$. Az első esetben G rendje 4, a másodikban 6. Az első eset nem jó, mert akkor G Abel, és így négy konjugált osztálya van. A másik esetben a két hatelemű csoport közül a nemkommutatív megfelelő lesz.