Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

I/B zárthelyi (2001. ápr. 11) — megoldásvázlatok

1. Indefinit, például $(4/5)|2x_1 + ix_2|^2 - (1/5)|x_1 - 2ix_2|^2 + |x_3|^2$.

2. Az eredmény a következő ($\lambda_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \frac{1}{2\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a_{n-1} & a_n \\ -4a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

ahol $a_n = ((1 + \sqrt{3}i)^n - (1 - \sqrt{3}i)^n)/2\sqrt{3}i$ (ami mellesleg $(2^n/\sqrt{3})\sin(n\pi/3)$).

3. A $v = [1, -1, 0, 0, \ldots, 0]^T$ által generált egydimenziós altér ortogonális kiegészítő alteréről tudjuk, hogy $2002 - 1 = 2001$-dimenziós. Az adott vektorok pontosan ezt generálják, hiszen minden vektor egy ugyanolyan irányú, 2 hosszú vektor alkalmas skalárszorosa.

4. Vegyük azt a Jordan-alakú mátrixot, melyben három darab kétszer kettes és egy darab egyszer egyes, a 7 sajátértékhez tartozó blokk van.

5. A megfelelő A transzformációra $A^* = -A^2$, így A normális, tehát komplex felett ortonormált bázisban diagonalizálható. A kapott D diagonális mátrix is teljesíti a $D^* = -D^2$ összefüggést, azaz A minden komplex λ sajátértékre $\overline{\lambda} = -\lambda^2$. Innen λ-val szorozva $|\lambda|^2 = -\lambda^3$, majd abszolút értéket véve $|\lambda|^2 = |\lambda|^3$ adódik. Mivel A bijektív, $\lambda \neq 0$, és ezért $|\lambda| = 1$ (tehát A ortogonális), továbbá $\lambda^3 = -1$. Az eredeti transzformáció valós, így vagy két konjugált komplex sajátérték van, vagy minden sajátérték valós. Az utóbbi esetben ezek értéke -1, tehát A a középpontos tükrözés. Az előbbi esetben A forgatás, és a sajátértékek mutatják, hogy ± 60 fokos. *Második megoldás:* Ha $M^2 = -M^T$, akkor $M^4 = (M^T)^2 = (M^2)^T = -(M^T)^T = -M$. De M invertálható, így $M^2 = -M^{-1}$, tehát M ortogonális. Mivel kétszer kettes, vagy forgatás, vagy tükrözés, vagy az identitás. Az $M^3 = -I$ miatt tehát vagy ± 60 fokos forgatás, vagy a középpontos tükrözés. *Harmadik megoldás:* Közvetlen számolással is kijön, hogy M az egységmátrix ellentettje, vagy a ± 60 fokos forgatás szokásos mátrixa. Ennek kultúrált végrehajtásához érdemes elsőnek észrevenni, hogy $\det M = 1$, és utána felhasználni a Cayley-Hamilton tételből adódó $M^2 = tr(M)M - \det(M)E$ összefüggést.

6. Igen. Mivel minden harmadfokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke, ezért minden térbeli A lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjának is, tehát van egy valós λ sajátérték. Ha a megfelelő sajátaltér legalább kétdimenziós, akkor ennek tetszőleges kétdimenziós altere megfelel. Ha ez a sajátaltér csak egydimenziós, akkor a dimenziótételt az $A - \lambda I$-re alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ megfelelő.