Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

I/A zárthelyi (2001. ápr. 11) — megoldásvázlatok

1. Indefinit, például $(\sqrt{2}/4)|(1-i)x_1+\sqrt{2}x_2|^2-(\sqrt{2}/4)|(1-i)x_1-\sqrt{2}x_2|^2+|x_3|^2$.

2. Az eredmény a következő:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}^n \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ -1+i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_{n-1} & a_n \\ -2a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

ahol $a_n = ((1+i)^n-(1-i)^n)/2i$ (ami mellesleg $2^{n/2}\sin(n\pi/4)$).

3. A $v=[1,1,\ldots,1]^T$ által generált egydimenziós altér ortogonális kiegészítő alteréről tudjuk, hogy $2002-1=2001$-dimenziós. Az adott vektorok pontosan ezt generálják, hiszen minden vektor egy ugyanolyan irányú, 2 hosszú vektor alkalmas skalárszorosa.

4. Vegyük azt a Jordan-alakú mátrixot, melyben két darab kétszer kettes és három darab egyszer egyes, a -7 sajátértékhez tartozó blokk van.

5. A megfelelő A transzformációra $A^*=A^2$, így A normális, tehát komplex felett ortonormált bázisban diagonalizálható. A kapott D diagonális mátrix is teljesíti a $D^*=D^2$ összefüggést, azaz minden λ komplex sajátértékre $\overline{\lambda}=\lambda^2$. Innen λ-val szorozva $|\lambda|^2=\lambda^3$, majd abszolút értéket véve $|\lambda|^2=|\lambda|^3$ adódik. Mivel A bijektív, $\lambda\neq 0$, és ezért $|\lambda|=1$ (tehát A ortogonális), továbbá $\lambda^3=1$, azaz λ harmadik egységgyök. Mivel az eredeti transzformáció valós, vagy két konjugált komplex sajátérték van, vagy minden sajátérték valós. Az utóbbi esetben ezek értéke 1, tehát A az identitás. Az előbbi esetben A forgatás, és a sajátértékek mutatják, hogy ±120 fokos. *Második megoldás:* Ha $M^2=M^T$, akkor $M^4=\left(M^T\right)^2=\left(M^2\right)^T=\left(M^T\right)^T=M$. De M invertálható, így $M^2=M^{-1}$, tehát M ortogonális. Mivel kétszer kettes, vagy forgatás, vagy tükrözés, vagy az identitás. Az $M^3=I$ miatt tehát vagy ±120 fokos forgatás, vagy az identitás. *Harmadik megoldás:* Közvetlen számolással is kijön, hogy M az egységmátrix, vagy a ±120 fokos forgatás szokásos mátrixa. Ennek kultúrált végrehajtásához érdemes elsőnek észrevenni, hogy $\det M=1$, és utána felhasználni a Cayley-Hamilton tételből adódó $M^2=tr(M)M-\det(M)E$ összefüggést.

6. Igen. Mivel minden harmadfokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke, ezért minden térbeli A lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjának is, tehát van egy valós λ sajátérték. Ha a megfelelő sajátaltér legalább kétdimenziós, akkor ennek tetszőleges kétdimenziós altere megfelel. Ha ez a sajátaltér csak egydimenziós, akkor a dimenziótételt az $A-\lambda I$-re alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{Im}(A-\lambda I)$ megfelelő.