Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Első zárthelyi, **A** *feladatsor (2002. ápr. 11)*

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve, valamint hogy **az A feladatsorról van szó.** Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *A komplex feletti* $(1+i)\overline{x_1}x_2 + (1-i)\overline{x_2}x_1 + \overline{x_3}x_3$ *kvadratikus alakot hozzuk négyzetösszeg alakra, és állapítsuk meg a karakterét. (A négyzetösszeg alakot az eredeti* x_1, x_2, x_3 *változókkal kell felírni, tehát az új bázis vektorait is ki kell számítani.)*

2. *Legyen* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *és* $a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n)$, *ha* $n \geq 0$. *Írjuk fel a sorozathoz tartozó mátrixot, adjuk meg a diagonális alakját és a megfelelő bázistranszformáció mátrixát, végül számítsuk ki a mátrix hatványainak és a sorozat általános elemének az explicit képletét.*

3. *Tekintsük az* $\mathbb{R}^{2002}$ *euklideszi téret (a szokásos skaláris szorzattal), és ebben azokat a 2 hosszú vektorokat, melyek merőlegesek az* $[1, 1, \ldots, 1]^T$ *vektorra. Határozzuk meg ennek a vektorrendszernek a rangját* $\mathbb{R}$ *felett.*

4. *Adjunk meg egy olyan hétszer hetes komplex mátrixot, melynek minimálpolinomja* $(x+7)^2$, *és van pontosan 5-dimenziós sajátaltere.*

5. *A sík egy bijektív lineáris transzformációjának a szokásos bázisban felírt* M *mátrixára teljesül, hogy* $M^T = M^2$. *Mi lehet ez a transzformáció?*

6. *Igaz-e, hogy a térben minden lineáris transzformációnak van kétdimenziós invariáns altere?*