Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Hetedik alkalom (2002. április 16–18)

1. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az S_3 csoport összes részcsoportját, valamint az A_4 alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját. Írjuk fel S_3-ban az $\{id, (12)\}$ részcsoporthoz tartozó összes bal- és jobboldali mellékosztályt. Keressük meg $\mathbb{Z}_{12}^{+}$ és $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$ összes részcsoportját.*

2. *Legyen $n\mathbb{Z}^+$ az n-nel osztható egész számok csoportja az összeadásra. Határozzuk meg $|\mathbb{Z}^+ : n\mathbb{Z}^+|$ értékét.*

3. *Határozzuk meg a G csoportban az X által generált részcsoportot:*
a) $G = \mathbb{Z}^+$, $X = \{28, 34\}$.
b) $G = S_4$, $X = \{(123), (12)(34)\}$.
c) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \{2, 3\}$.
d) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, X *a 2 determinánsú mátrixok halmaza.*
e) $G = S_n$, $X = \{(12), (12\ldots n)\}$.

4. *Legyen f a D_n diédercsoportban egy $2\pi/n$ szögű forgatás, t pedig tetszőleges tengelyes tükrözés. Mutassuk meg, hogy D_n minden eleme egyértelműen felírható f^i vagy tf^i alakban, ahol $0 \le i < n$. Igazoljuk azt is, hogy $f^i t = tf^{-i}$ minden i egészre.*

5. *Határozzuk meg a D_5 és D_6 diédercsoportokban a $\langle t, f^2 \rangle$ részcsoportot.*

6. *Mutassuk meg, hogy ha A és B részcsoportok egy G csoportban, akkor AB akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.*

7. *Igazoljuk, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G Abel. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

8. *Ciklikus-e a három-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportja?*

9. *Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok additív csoportja nem végesen generált, sőt, minimális generátorrendszere sincs.*

10. *Mutassuk meg, hogy két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű. Mennyi lehet a metszet indexe legfeljebb?*

11. *Igazoljuk, hogy minden nem egyelemű véges csoportban van prímrendű elem.*

12. *Mutassuk meg, hogy ha $|g|$ és $|h|$ relatív prímek, és $gh = hg$, akkor $|gh| = |g||h|$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

13. *Igazoljuk, hogy $|G|$ pontosan akkor páros, ha G-ben van másodrendű elem.*

14. *Legyen G csoport, H részcsoportja G-nek és $g \in G$. Mutassuk meg, hogy a $g^{-1}Hg$ komplexusszorzat is részcsoport, melynek rendje ugyanaz, mint H rendje. Igaz-e, hogy a Hg jobboldali mellékosztály G egy alkalmas részcsoportja szerinti baloldali mellékosztály is egyben?*

15*. *Bizonyítsuk be, hogy végesen generált csoportnak minden véges indexű részcsoportja végesen generált.*