Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Ötödik alkalom (2002. március. 12–14)

Legyen a B szimmetrikus bilineáris függvény mátrixa M. Végezzük el rajta a következő, módosított Gauss-eliminációt. Az elemi lépés most az, hogy az egyik sorból kivonjuk egy másik skalárszorosát, és *ezután azonnal* az ugyanannyiadik oszlopból is kivonjuk a megfelelő oszlop ugyanannyiszorosát. Hasonlóképpen kicserélhetünk két sort, és *utána azonnal* a megfelelő két oszlopot. Az M mátrixot a főátlóban lefelé haladva diagonalizáljuk ezekkel a lépésekkel, ezért elég azt megmutatni, hogy az első sor és oszlop nem átlóbeli elemei kinullázhatók. Ez nyilvánvaló akkor, ha a bal felső sarokban nem nulla áll. Ha ott nulla áll, de a főátló nem végig nulla, akkor a bal felső sarokba cserélünk egy nem nulla elemet. Végül ha a főátló végig nulla, akkor az első oszlop egy nem nulla elemének sorát adjuk hozzá az első sorhoz (és a megfelelő oszlopot is az első oszlophoz).

1. *Tekintsük a* $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ *és a* $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ *kvadratikus alakot* $\mathbb{R}$ *illetve* $\mathbb{C}$ *felett. Írjuk fel ezek mátrixát, transzformáljuk őket négyzetösszeggé a fenti módszerrel is és a Gram-Schmidt eljárással is, végül határozzuk meg karakterüket.*

2. *Mely testek fölött diagonalizálható az* $x_1y_2 + x_2y_1$ *szimmetrikus bilineáris függvény? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.*

3. *Legyen* Q *kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren,* $e_1, \ldots, e_n$ *egy* Q*-ortogonális bázis, és* $U = \langle e_i \mid Q(e_i) > 0\rangle$, $V = \langle e_i \mid Q(e_i) \geq 0\rangle$, $W = \langle e_i \mid Q(e_i) = 0\rangle$. *E három altér közül melyek függetlenek az* $e_1, \ldots, e_n$ *bázistól?*

4. *Ellentmond* $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x-y)^2$ *a tehetetlenségi tételnek? (Mindkettő négyzetösszeg, de az egyikben van egy mínusz előjel is. Hogy lehet ez?)*

5. *Igazoljuk, hogy a fenti eljárás diagonális mátrixhoz vezet. Hogyan módosul a bázis az elemi lépések során?*

6*. *Igazoljuk, hogy egy valós test feletti kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha mátrixában a bal felső sarokban álló aldeterminánsok (az úgynevezett főminorok) mind pozitívak, és akkor és csak akkor negatív definit, ha a növekvő főminorok előjeleinek sorozata* $-, +, -, +, -, \ldots$.

7. *Mely bilineáris függvények mátrixa nem függ a bázistól?*

8. *Egy bilineáris függvény* **antiszimmetrikus**, *ha* $B(u,v) = -B(v,u)$ *minden* u, v*-re. Igazoljuk valós felett, hogy* B *akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak nulla, továbbá hogy a bilineáris függvények tere a szimmetrikus és az antiszimmetrikus bilineáris függvények altereinek direkt összege.*

9. *Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris függvény egyértelműen írható* $A + Bi$ *alakban, ahol* A *és* B *Hermitikus.*

10. *Legyen* B *pozitív definit bilineáris függvény. Igaz-e, hogy tetszőleges* $v_1, \ldots, v_n$ *vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a* $|((B(v_i, v_j))|$ *determináns nullától különböző?*

11*. *Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?*

12*. *Mely* B *komplex bilineáris függvényekre igaz, hogy* $B(u,v) = 0 \Longleftrightarrow B(v,u) = 0$?