Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Negyedik alkalom (2002. március. 5–7)

1. *Határozzuk meg a III/9.-beli mátrixok minimálpolinomját. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyeknek másodfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző? Adjunk meg a síkon olyan lineáris transzformációt, melynek minimálpolinomja* x^2.

2. *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

3. *Oldjuk meg* $\mathbb{Q}^{2\times 2}$*-ben az* $X^4 = 2X$ *egyenletet.*

4. *Igazoljuk, hogy egy racionális elemű négyzetes mátrix minimálpolinomja ugyanaz* $\mathbb{Q}$ *és* $\mathbb{C}$ *felett. (Használjunk fel egy korábban a gyakorlaton szerepelt állítást homogén racionális együtthatós egyenletrendszerek komplex megoldásairól).*

5. *Igazoljuk, hogy ha* M *invertálható mátrix, akkor* M^{-1} *polinomja* M*-nek.*

6. *Tekintsük* $\mathrm{Hom}(V)$*-ben az* $\{A^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ $(A^0 = I)$ *transzformációk által generált alteret. Hány dimenziós ez az altér?*

7. *Igaz-e, hogy tetszőleges legfeljebb* n*-edfokú* $m(x)$ *polinomhoz van az* n*-dimenziós vektortérnek egy olyan lineáris transzformációja, amelynek* $m(x)$ *a minimálpolinomja? Mely polinomok állnak elő egy alkalmas lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként?*

---

8. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

9. *Bizonyítsuk be, hogy ha* M *komplex elemű mátrix, akkor* $n \to \infty$ *esetén* M^n *akkor és csak akkor tart nullához, ha* M *minden sajátértékének az abszolút értéke* 1*-nél kisebb.*

10. *Legyen* T *test,* $\lambda \in T$*, és* M *az az* $n \times n$*-es Jordan-blokk, melynek főátlójában* λ*, az alatta levő, vele párhuzamos „ferde sorban" csupa* 1*-es, a mátrix többi helyén pedig mindenütt nulla áll. Igazoljuk, hogy ha* $f \in T[x]$*, akkor az* $f(M)$ *mátrix elemei a következők: a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított* k*-adik „ferde sor" mindegyik eleme* $f^{(k)}(\lambda)/k!$*, ahol a* (k) *kitevő* k*-adik deriváltat jelöl* $(0 \leq k \leq n-1)$.

---

11. *Legyen* T *a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha* T *diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

12. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

FORDÍTS!

13. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá* $\mathrm{Im}(A)$ *és* $\mathrm{Ker}(A)$ *is B-invariáns altér.*

14. *Van-e olyan $M \in \mathbb{Q}^{100\times 100}$ mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van?*

15. *Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A-val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.*

16. *Legyen A lineáris transzformáció egy komplex feletti n-dimenziós vektortéren.*
a) Igazoljuk, hogy ha $k \le n$, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.
b) Mik lesznek A hatványainak sajátértékei? Mit mondhatunk ezek multiplicitásairól?

17. *Legyen W altere a V vektortérnek, $\mathbb{A} = \mathrm{Hom}(V)$ mint algebra, és álljon $\mathbb{B}$ az $\mathbb{A}$ azon elemeiből, melyeknek W invariáns altere. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{B}$ részalgebrája $\mathbb{A}$-nak, és határozzuk meg a dimenzióját.*

18. *Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \mathrm{Im}(A^k) \oplus \mathrm{Ker}(A^k)$.*

19. *Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $g \in T[x]$, továbbá $W = \mathrm{Im}(g(A))$ és $U = \mathrm{Ker}(g(A))$. Igazoljuk, hogy az A transzformáció W-re illetve U-ra vett megszorításának minimálpolinomja $m_A/(m_A, g)$ illetve (m_A, g). Vessük össze ezt az állítást az elem hatványának rendjéről szóló képlettel.*

20*. *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*

---

21. *Határozzuk meg a komplex számok $\mathbb{R}$ feletti algebrájában a $\sqrt{2}+1$ minimálpolinomját.*

22. *Definiáljunk szorzást az $(x, y)(u, v) = (xu + yv, xv + yu)$ képlettel a sík pontjainak vektorterén. Így egy $\mathbb{R}$ feletti egységelemes algebrát kapunk. Mi lesz ebben a $(3, 2)$ elem minimálpolinomja?*

23. *A Gauss-egészek az $a+bi$ alakú komplex számok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Határozzuk meg ebben a gyűrűben a legszűkebb olyan ideált, ami az $5 + 5i$ és a $7i - 1$ számokat is tartalmazza, majd adjuk meg ennek az ideálnak az összes generátorelemét.*

24. *Legyen V véges dimenziós, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $0 \ne v \in V$. Igazoljuk a következőket:*
a) Azok a p polinomok, melyekre $p(A)v = 0$, ideált alkotnak $T[x]$-ben. Jelölje $m_{A,v}$ ennek a normált generátorelemét.
b) m_A az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V-t.
c) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots\rangle$ épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.
d) $\dim(W) = \mathrm{gr}(m_{A,v})$.
e) Ha m_A-nak van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.
f) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).

Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.