Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Harmadik alkalom (2002. feb. 26–28)

Vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója, ami tetszőleges maximális független részrendszer elemszáma. Lineáris leképezés rangja a képterének dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora, mind bármelyik tényező rangja. Lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának az oszloprangja. Mátrix oszloprangja ugyanaz, mint a sorrangja, és ez a Gauss-eliminációban fellépő vezéregyesek száma.

1. *Az alábbi M mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, valamint rangját.*

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2. *Határozzuk meg az $\{x^2+2x+2,\ 2x^2-3x+6,\ 3x^2-8x+10\}$ polinomrendszer rangját.*

3. *Igazoljuk, hogy ha A és B összeadható lineáris leképzések, akkor $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$. Adjunk példát arra az esetre, amikor egyenlőség áll, és arra is, amikor nem.*

4. *Legyenek $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Igazoljuk, hogy*
a) $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ *és* $\mathrm{Ker}(AB) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$;
b) ha AB injektív (illetve szürjektív), akkor B (illetve A) is az;
c) ha A és B is injektív (szürjektív, bijektív), akkor AB is az;
d) $r(AB) = r(B) - \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(B)) \geq r(A) + r(B) - \dim(V)$.

5. *Legyenek V, W ugyanazon test feletti vektorterek, és $v \in V$ egy rögzített vektor. Jelölje $\mathcal{X}$ azt a lineáris leképezést $\mathrm{Hom}(V,W)$-ből W-be, ami az A leképezéshez $A(v)$-t rendeli. Határozzuk meg $\mathcal{X}$ rangját.*

6. *Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 8 rangú, 13×21-es valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangja hét lesz, akkor felfallak." Érdemes-e a királylánynak bejárni az algebra előadásra?*

A sárkány a királylány nyolcéves hugát is meglátogatta. „Neked egy 8 rangú 8×8-as mátrixot kell most rögtön felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát a most felírt mátrixot már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak." Ez a lány már korábban megtanulta a lineáris algebrát. Életben maradt-e?

7. *Ha egy $n \times n$-es M mátrix rangja r, mi lesz annak a mátrixnak a rangja, amelynek elemei az M megfelelő ($(n-1) \times (n-1)$-es) előjeles aldeterminánsai?*

8*. *Mely r egészekhez van olyan $k \times n$-es valós mátrix, amelynek rangja r, és egyik $r \times r$-es aldeterminánsa sem nulla?*

Fordíts!

9. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-alakját.*

a) Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.

b) A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

c) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

10. *Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.*

11. *Egy város lakásait három kategóriába sorolják állapotuk szerint: elhanyagolt, átlagos, és kitűnő. A jelenlegi finanszírozási lehetőségek mellett az éves statisztikák azt mutatják, hogy az elhanyagolt lakások* 60 *százaléka elhanyagolt marad az év végére is,* 30 *százalékukat felújítják átlagos állapotúra, a maradék* 10 *százalékot pedig kitűnő állapotúra. Az átlagos állapotú lakások* 20 *százaléka leromlik elhanyagoltra,* 70 *százaléka marad átlagos állapotú, a maradék* 10 *százalékot pedig felújítják. Végül a kitűnő állapotú lakások* 80 *százaléka kitűnő állapotban marad, a maradék* 20 *százalék pedig leromlik átlagosra az év végére. Hosszú távon mi lesz a lakások állapotának eloszlása? [Eredmény:* $2 : 4 : 3$*, százalékban közelítőleg* $22.2 : 44.4 : 33.3$*, ez már 4-5 év alatt beáll, és nem függ a kiinduló eloszlástól.]*

12. *Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.*

a) $a_0 = a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ *(Fibonacci-sorozat).*

b) $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.

13. *Adjunk explicit képletet az a_k és b_k számokra, amelyek rekurzív definíciója a következő:* $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ $(k \geq 0)$.

14. *Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?*

15. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*

a) Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.

b) Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.

c) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.

16. *Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es M mátrix főátlójában és ezalatt csupa nulla áll. Igazoljuk, hogy $M^n = 0$.*

17. *Igazoljuk, hogy minden transzformációnak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, mint (tetszőleges bázisban felírt) mátrixának, és hogy egy $n \times n$-es M mátrix karakterisztikus polinomja n-edfokú polinom. Milyen kapcsolatban állnak az M karakterisztikus polinomjának együtthatói M nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha M-nek n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az M nyoma, szorzatuk az M determinánsa.*