Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Második alkalom (2002. feb. 19–21)

Bizonyos vektorterekben egy-egy bázist a „szokásos" bázisnak nevezzük. Ezek a következők. A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A $T^{k\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyekben egyetlen komponens 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük). A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ bázis. A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok. A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i. Egy T testben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

Egy A lineáris transzformáció *nilpotens,* ha van olyan n pozitív egész, hogy $A^n = 0$ (a nulla transzformáció), és A *idempotens,* ha $A^2 = A$.

1. *Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.*

a) A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.

b) A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.

c) A $T^{2\times 3}$ a T test felett.

d) A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?

e) Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.

f) Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.

g) A $T^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.

2. *A $\mathbb{Z}_2^3$ vektortérben hány direkt kiegészítő altere van egy egydimenziós altérnek?*

3. *Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V-ben. Bizonyítsuk be, hogy* $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

4. *Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.*

5. *Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$ esetén minden $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek végtelen sok $n-1$-dimenziós altere van.*

6. *Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban, határozzuk meg a kép- és magterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.*

a) V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítés esetében számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (-1,1)$ bázisban.

b) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.

c) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.

d) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.

e) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, A a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).

f) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$.

g) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).

FORDÍTS!

7. *Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

8. *Az A transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az A mátrixát az $(1,1)$, $(1,2)$ bázisban.*

9. *Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, illetve a képtere.*

10. *Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?*

11. *Mutassuk meg, hogy ha A idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, akkor $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = V$. Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.*

12. *Igazoljuk, hogy ha az A és B nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $AB = BA$), akkor $A + B$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?*

13. *Legyen $\dim V < \infty$ és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Igaz-e, hogy A pontosan akkor nilpotens,*
a) ha nem létezik olyan $W \leq V$ nem nulla altér, hogy $A(W) = W$?
b) ha tetszőleges $W \leq V$ nem nulla altérre $\dim A(W) < \dim W$?

14*. *Legyen A egy $n \times n$-es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy $A^n = 0$.*

15. *Legyen V egy n-dimenziós vektortér és $v, w \in V$. Alteret alkotnak-e $\mathrm{Hom}(V)$-ben az alábbi halmazok? Ha igen, hány dimenziós ez az altér?*
a) $\{A \in \mathrm{Hom}(V) \mid A(v) = w\}$;
b) $\{A \in \mathrm{Hom}(V) \mid A(v) \in \langle w \rangle\}$.
Határozzuk meg $\mathrm{Hom}(V)$-ben az izomorfizmusok által generált alteret.

16. *Adjunk meg olyan A és B lineáris transzformációkat egy alkalmas V vektortéren, melyekre $AB = I$ (az identitás), de BA nem az.*

17. *Legyenek V_1 és V_2 véges dimenziós vektorterek, és $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. Igazoljuk:*
a) Ha A szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.
b) Ha A valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.
c) Ha A injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.
d) Ha A egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.
e) Van olyan B lineáris leképezés, hogy $ABA = A$ és $BAB = B$, és itt ha A szürjektív, akkor B jobbinverze, ha pedig A injektív, akkor B balinverze A-nak.
f) $(AX = AY \implies X = Y) \iff A$ injektív $\iff A$ balinvertálható.
g) $(XA = YA \implies X = Y) \iff A$ szürjektív $\iff A$ jobbinvertálható.

18. *Algebrát alkotnak-e $\mathbb{R}$ felett az $\mathbb{R}$-en értelmezett, valós értékű, folytonos függvények a szokásos, pontonkénti műveletekre? És akkor, ha a szorzást a kompozícióval helyettesítjük?*

További gyakorlásul a Freud-könyv negyedik és ötödik fejezetének feladatait javaslom, leginkább ezeket: 4.2.7, 4.2.12, 5.1.15, 5.3.4, 5.4.3, 5.6.19, 5.7.7, 5.7.8, 5.8.3, 5.8.7.