**Alk. mat. gyakorlat, második évfolyam, első félév**
*Második zárthelyi (2002. dec. 19) — megoldásvázlatok*

**1.** A normálalakban a főátló $1, 1, x, -x^3$ lesz (4 pont), a Jordan alak egy $3 \times 3$-as és egy $1 \times 1$-es blokkból áll, mindkettő a nulla sajátértékhez tartozik (2 pont).

**2.** Az egyetlen nemtriviális kongruencia az, amikor a négyelemű lánc két középső elemét csípjük össze (ezt ugyanígy számolhatjuk ki, mint az $M_3$ egyszerűségét). A kongruenciaháló tehát a háromelemű lánc.

**3.** Az eredmény $K$. Jelölje $K$ elemeit $\{0, a, b, a+b\}$. Ezek mindegyikének kétszerese nulla, és ezért ha $\varphi : K \to \mathbb{Z}_6^+$ egy homomorfizmus, akkor minden képelem kétszerese is nulla. A $\mathbb{Z}_6^+$ ilyen eleme csak a 0 és a 3 (2 pont). Tehát $a$ és $b$ képe is nulla vagy 3 lehet, ami összesen négyféle homomorfizmust jelent, hiszen $a+b$ képét $a$ és $b$ képe meghatározza (2 pont). Mind a négyfajta lehetséges leképezés könnyen láthatóan tényleg homomorfizmus. Mivel mindegyiknek a kétszerese nulla, ez a négyelemű Hom-csoport nem ciklikus, és így a négyelemű csoportok ismert felsorolása miatt csak a Klein-csoport lehet (2 pont).

**4.** Nem. Tegyünk az $M_3$ háló „alá” egy új elemet (ami az összes többinél kisebb). Ez ellenpélda, hiszen moduláris, nem disztributív, és csak a legalsó és legfelső elemnek van komplementuma.

**5.** Ilyen például egy (origón átmenő) tengely körüli 90 fokos forgatás. Ha ugyanis a $v \neq 0$ vektor merőleges a tengelyre, akkor $(x^2+1)v = A^2(v) + v = 0$, azaz $v$ rendje $x^2+1$-nek osztója. De $x^2+1$ irreducibilis $\mathbb{R}$ felett, és $v \neq 0$ miatt $v$ rendje nem lehet konstans.

**6.** Az eredmény $\mathbb{Z}_2^+$. Mivel $0 \otimes g = 0$, a tenzorszorzat elemei $\sum n_i(1 \otimes g_i)$ alakú lineáris kombinációk, de ez az összeg $1 \otimes g$ alakra vonható össze, alkalmas $g \in A$ elemre. Ha a $g$ tört $p/q$ alakú, ahol $p$, $q$ egészek és $q$ páratlan, akkor $\mathbb{Z}_2^+$-ban $q \cdot 1 = q$, és ezért $1 \otimes g = (q \cdot 1) \otimes (p/q) = 1 \otimes q = (p \cdot 1) \otimes 1$. Tehát $\mathbb{Z}_2^+ \otimes A = \{0, 1 \otimes 1\}$ (3 pont). Meg kell még mutatni, hogy $1 \otimes 1 \neq 0$ ebben a tenzorszorzatban. Tekintsük azt az $f : \mathbb{Z}_2^+ \times A \to \mathbb{Z}_2^+$ bihomomorfizmust, amely $(1, g)$-hez nullát rendel, ha $g$ számlálója páros, és egyet, ha $g$ számlálója páratlan. Könnyű kiszámolni, hogy ez tényleg bihomomorfizmus. Ez tehát keresztülvezethető a tenzorszorzaton, azaz van olyan $\varphi : \mathbb{Z}_2^+ \otimes A \to \mathbb{Z}_2^+$ homomorfizmus, amelyre $\varphi(1 \otimes 1) = f(1,1) = 1$. Így $1 \otimes 1 \neq 0$ (3 pont).