Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Nyolcadik alkalom (2002. november 21)

Ha A Abel-csoport és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $nA = \{na \mid a \in A\}$. Az A *torziócsoport,* ha minden eleme véges rendű; *torziómentes,* ha csak a 0 véges rendű; *szabad,* ha $\mathbb{Z}^+$ néhány példányának direkt összegével izomorf; *osztható,* ha az $nA = A$ minden $0 \neq n \in \mathbb{Z}$-re. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jelöli a komplex p-hatványadik egységgyökök csoportját a szorzásra (p prím).

1. *Számítsuk ki a* $\operatorname{Hom}(A,B)$, $\operatorname{Hom}(B,A)$, $A \otimes B$ *Abel-csoportokat, ha* (A,B) *rendre* $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}^+)$; $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_m^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ *(mint* $\mathbb{Z}$*-modulusok).*

2. *Legyen* V *a sík, mint* $\mathbb{R}$ *feletti vektortér. Írjuk fel* $V \otimes V$ *alábbi elemeit a lehető legrövidebb alakban (azaz minél kevesebb tenzor összegeként).*

a) $(1,0) \otimes (2,4) + (2,0) \otimes (2,4) + (3,0) \otimes (1,2)$.
b) $(1,0) \otimes (1,0) + (1,0) \otimes (0,1) + (0,1) \otimes (1,0) + (0,1) \otimes (0,1)$.
c) $(1,0) \otimes (2,2) + (1,2) \otimes (2,1) + (0,1) \otimes (1,0)$.

3. *Igaz-e:*

a) *Osztható csoportnak bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata osztható.*
b) *Torziócsoport bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata torziócsoport.*
c) *Osztható csoportnak bármely torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.*
d) *Két szabad Abel-csoport tenzorszorzata is szabad.*
e) *Ha* A *tetszőleges Abel-csoport, akkor* $\mathbb{Z}_n^+ \otimes A \cong A/nA$.

4. *Számítsuk ki* $A = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}^+$ *esetén* $\operatorname{Hom}(A, \varphi)$*-t,* $\operatorname{Hom}(\varphi, A)$*-t és* $A \otimes \varphi$*-t. Vizsgáljuk meg, hogyan függ össze* φ *és az eredmény injektivitása, illetve szürjektivitása.*

a) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *az a homomorfizmus, ami minden elemhez az* n*-szeresét rendeli.*
b) $\varphi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{nm}$*, az* n*-nel szorzás.*
c) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ *a* mod n *vett maradék képzése.*
d) φ *a* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *beágyazás.*

Ha M egy R-modulus, és $X \subseteq M$, akkor $\operatorname{ann}(X) = \{r \in R \mid rX \subseteq \{0\}\}$ az X *annullátora.* Az M modulus *hű,* ha $\operatorname{ann}(M) = \{0\}$. Az $\{m\}$ annullátorát (és ha R főideálgyűrű, akkor ennek az ideálnak a generátorelemét is) az $m \in M$ elem *rendjének* nevezzük, jele $o(m)$.

5. *Modulusok, illetve unitér modulusok-e az alábbi struktúrák? Határozzuk meg a részmodulusokat, és a rendeket is, valamint, hogy mikor hű a kapott modulus.*

a) *Egy* A *Abel-csoport* $\mathbb{Z}$ *felett, ahol* $n \circ a = na$ *jelentése a szokásos.*
b) *Egy* m *exponensű* A *Abel-csoport* $\mathbb{Z}_m$ *felett, ahol* $n \circ a = na$ *jelentése a szokásos.*
c) *Ha* T *test, akkor* T^n *a* $T^{n \times n}$ *felett a mátrix-vektor szorzásra.*
d) *Ha* V *vektortér a* T *test felett, és* $A \in \operatorname{Hom}(V)$*, akkor* V *a* $T[x]$ *felett a* $p \circ v = p(A)v$ *szorzásra. Hogyan kapcsolódik a rend fogalma a tavaly tanult* $m_{A,v}$ *polinomokhoz? Milyen* A *esetén ciklikus ez a modulus, ha a* V *kétdimenziós?*

6. *Mutassuk meg, hogy* $\operatorname{ann}(X)$ *balideál, és ha* X *részmodulus, akkor kétoldali ideál. Vezessük le ebből, hogy balideál baloldali annullátora kétoldali ideál.*

7. *Tegyük* $\mathbb{R}$ *additív csoportját modulussá* $\mathbb{R}[x]$ *felett kétféleképpen. Az első modulus szorzása* $p(x) \circ r = p(1)r$*, a másodiké* $p(x) \circ r = p(2)r$*. Izomorf modulusokat kaptunk-e?*

8. *Általánosítsuk a hatvány rendjének képletét főidálgyűrű feletti modulusokra.*