Alkalmazott matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

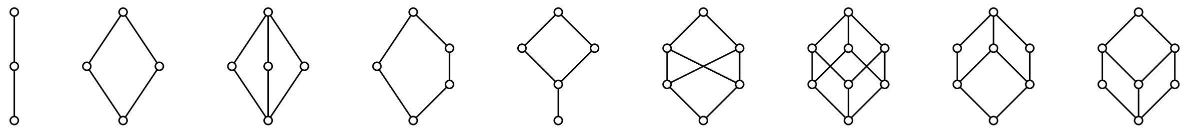
Hatodik alkalom (2002. november 7)

1. *Hány kétváltozós művelet van egy négyelemű halmazon?*

2. *Írjuk fel az alábbi kétváltozós műveletek szorzástábláit, és osztályozzuk a megfelelő struktúrákat aszerint, hogy izomorfak-e: az* $\{1, i, -1, -i\}$ *számok a szorzásra;* $\mathbb{Z}_4^+$*;* $\mathbb{Z}_8^\times$*;* $\mathbb{Z}_5^\times$*; a* $\{0, 2, 4, 6\}$ *halmaz a modulo* 8 *összeadásra illetve szorzásra; a* $\{0, 4, 8, 12\}$ *halmaz a modulo* 16 *összeadásra illetve szorzásra; a* $\{3, 9, 27, 81\}$ *halmaz a modulo* 81 *szorzásra; egy kételemű halmaz összes önmagába menő leképezése a kompozícióra; egy négyelemű halmaz összes önmagába menő* **konstans** *leképezése a kompozícióra; egy téglalap illetve rombusz összes szimmetriája a kompozícióra; egy kételemű halmaz összes részhalmaza az unióra, a metszetre, illetve a szimmetrikus differenciára; a* $\mathbb{Z}_2$ *feletti összes polinomfüggvények a szorzásra; az* $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ *halmaz az* $(a, b) * (c, d) = (a, d)$ *műveletre; a* $\{0, 1, 2, 3\}$ *halmaz a* min *illetve* max *műveletekre (összesen* 20 *struktúra).*

3. *Az előző feladatban szereplő struktúráknak számítsuk ki az összes részstruktúráit, és az összes kongruenciáit (nem kell az összes struktúráét kiszámolni, csak annyit, amennyi elég ahhoz, hogy a dolog flottul menjen). Melyek bonthatók fel nemtriviális módon direkt szorzatra, és melyek generálhatók egy elemmel? Keressünk olyan négyelemű félcsoportokat, amelyek a felsoroltak egyikével sem izomorfak. Van-e négyelemű egyszerű félcsoport?*

4. *Döntsük el az alábbi részben rendezett halmazokról, hogy hálók-e, és ha igen, akkor disztributívak illetve modulárisak-e. Határozzuk meg ezeknek a hálóknak a kongruenciáit és részhálóit, és rajzoljuk le a kongruenciahálójukat és a részháló-hálójukat. Melyek lesznek komplementumosak, egyszerűek, illetve szubdirekt irreducibilisek? Keressük meg a metszet- illetve egyesítés-irreducibilis elemeket. Adjuk meg a második hálónak az elsőbe menő rendezéstartó leképezéseit, és válogassuk ki ezek közül a háló-homomorfizmusokat. Mindegyik lerajzolt hálóban keressünk minimális elemszámú generátorrendszert.*



Igazoljuk, hogy egy $\equiv$ *ekvivalencia-reláció pontosan akkor háló-kongruencia, ha minden* c*-re* $a \equiv b$*-ből* $a \vee c \equiv b \vee c$ *és* $a \wedge c \equiv b \wedge c$ *következik.*

5. *Vezessük le mindkét disztributív szabályból a másikat, és ezekből a moduláris szabályt.*

6. *Mutassuk meg, hogy egy háló-kongruencia minden osztálya konvex részháló.*

7. *Mutassuk meg, hogy egy csoport normálosztóhálója mindig moduláris, de nem feltétlenül disztributív, a részcsoporthálója pedig nem is biztos, hogy moduláris.*

8*. *Van-e olyan kétváltozós művelet egy négyelemű halmazon, hogy a kapott struktúrának csak egy részalgebrája és két kongruenciája legyen (a triviálisak)?*

9*. *Írjuk le az egyszerű, kommutatív félcsoportokat.*

10*. *Igazoljuk, hogy ha egy nullelemes véges félcsoportban minden elem alkalmas hatványa nulla, akkor minden elég hosszú szorzat nulla.*