**Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév**

*Ötödik alkalom (2002. október 15–17)*

**1.** *Igazoljuk, hogy az* $x^5-15x-3$, $x^5-35x+5$, $x^5-15x^4+6$ *polinomok egyike sem oldható meg gyökjelekkel.*

**2.** *Mutassuk meg, hogy az* $x^3-3x+1$ *polinom minden gyöke gyökkifejezés* $\mathbb{Q}$ *felett, de a polinom felbontási teste nem érhető el gyökökkel. Ha egy véges normális bővítés minden eleme szerkeszthető, akkor következik-e ebből, hogy maga a bővítés az alaptestből elérhető másodfokú bővítések sorozatával? És ha a normalitás feltételét elhagyjuk?*

**3.** *Legyen* $p$ *prím, és* $K$ *nulla karakterisztikájú test, ami nem tartalmaz* $p$*-edik primitív egységgyököt. Mutassuk meg, hogy ha* $a\in K$*, akkor* $x^p-a$ *vagy irreducibilis* $K$ *fölött, vagy pontosan egy gyöke van* $K$*-ban. Mi lesz a Galois-csoportja ebben a második esetben?*

**4.** *Az alábbi feladatokban adjuk meg a* $K$ *alaptestet, a* $K(\alpha)$ *fokát* $K$ *felett, az* $\alpha$ *minimálpolinomja felbontási testének fokát* $K$ *felett, és döntsük el, hogy a szerkesztés elvégezhető-e.*

a) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő* $\alpha=\sqrt[5]{2}$.
b) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő* $\alpha=\sqrt[4]{2}$.
c) *Adott az egységszakasz és egy* $\sqrt[3]{2}$ *hosszú szakasz, szerkesztendő* $\alpha=\sqrt[6]{2}$.
d) *Adott az egységszakasz és egy* $\sqrt[3]{2}$ *hosszú szakasz, szerkesztendő* $\alpha=\sqrt[5]{2}$.
e) *Adott* $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,\pi)$*, a feladat az egységsugarú kör négyszögesítése.*
f) *Adott egy szabályos 9-szög a síkon. Szerkesztendő egy szabályos 18-szög. Mi az* $\alpha$*?*

**5.** *Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Az egységszakaszból akarunk* $\pi$ *hosszú szakaszt szerkeszteni. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a síkon adott egységszakasz két végpontja a* $(0,\pi)$ *és az* $(1,\pi)$ *pontokba kerüljön. Ekkor* $K=\mathbb{Q}(0,1,\pi)$*, amelynek a szerkesztendő szám eleme. Tehát ez a szerkesztés elvégezhető.*

**6.** *Szerkeszthető-e a háromszög két oldalából és az egyikhez tartozó szögfelezőből?*

**7.** *Szerkeszthető-e az egyenlő szárú háromszög a szárából és a beírt kör sugarából?*

**8.** *Igazoljuk, hogy ha* $x^4+ax^2+bx+c\in\mathbb{Q}[x]$ *irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett, akkor ekvivalensek:*

(1) *Az egyenlet valamelyik gyöke szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva.*
(2) *Az egyenlet összes gyöke szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva.*
(3) *A* $8x^3-4ax^2-8cx+(4ac-b^2)$ *polinomnak van racionális gyöke.*

**9.** *Tegyük fel, hogy egy nulla karakterisztikájú* $K$ *test feletti* $f$ *polinomnak nincsenek többszörös gyökei. Mutassuk meg, hogy* $f$ *Galois-csoportja akkor és csak akkor része a gyökök halmazán ható alternáló csoportnak, ha* $f$ *diszkriminánsa egy* $K$*-beli elem négyzete.*

**10.** *Legyen* $p$ *prímszám, és* $K$ *egy* $p$ *karakterisztikájú test. Definiáljuk a* $K$ *feletti* $n$*-edik* $\Phi_n$ *körosztási polinomot ugyanazzal a rekurzióval, mint* $\mathbb{Z}$ *fölött.*

a) *Tegyük fel, hogy* $n=p^km$*, ahol már* $p\nmid m$*. Mutassuk meg, hogy* $\Phi_n=\Phi_m^{\varphi(p^k)}$.
b) *Igazoljuk, hogy ha* $p\nmid m$*, akkor* $\Phi_m$ *gyökei* $K$*-ban pontosan a* $K$ *multiplikatív csoportjának* $n$ *rendű elemei.*
c) *Igazoljuk, hogy ha* $p\nmid m$*, akkor* $\Phi_m$ *felbomlik* $o_m(p)$ *fokú, a* $K$ *prímteste fölött irreducibilis polinomok szorzatára.*
d) *Hogyan kaphatjuk meg a* $K$ *felett irreducibilis tényezők fokszámát?*