Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Harmadik alkalom — megoldásvázlatok (2002 ősz)

1. A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ bővítés nem normális, mert $x^4 - 2$ irreducibilis polinom $\mathbb{Q}$ felett, melynek van gyöke $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$-ben, de nincs itt minden gyöke (hiszen $\pm i\sqrt[4]{2}$) nem valósak). Ha e polinom összes gyökével bővítünk, akkor az $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ testet kapjuk, ami már normális bővítése $\mathbb{Q}$-nak, mert egy racionális együtthatós polinom felbontási teste. Könnyen láthatjuk, hogy ennek a testnek 8 a foka $\mathbb{Q}$ felett, sőt a szorzástétel bizonyításából kiindulva e bővítés egy bázisát is felírhatjuk. Ezek szerint L minden β eleme egyértelműen írható

$$\beta = a + b\sqrt[4]{2} + c(\sqrt[4]{2})^2 + d(\sqrt[4]{2})^3 + ei + fi\sqrt[4]{2} + gi(\sqrt[4]{2})^2 + hi(\sqrt[4]{2})^3$$

alakban, ahol $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Q}$.

Legyen G a $\mathbb{Q} \leq L$ bővítés Galois-csoportja, és $\varphi \in G$. Mivel φ fixálja a racionális számokat, a fenti képletből látjuk, hogy $\varphi(\beta)$ kiszámításához elegendő a $\varphi(i)$ és a $\varphi(\sqrt[4]{2})$ ismerete (ez közvetlenül is látszik abból, hogy L-et ez a két elem generálja $\mathbb{Q}$ felett). Tudjuk, hogy a Galois-csoport elemei permutálják az alaptestbeli együtthatós polinomok gyökeit. Speciálisan tehát az x^2+1 polinomot vizsgálva azt kapjuk, hogy $\varphi(i) = \pm i$, az $x^4 - 2$-ből pedig az adódik, hogy φ ennek az $\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_2 = i\sqrt[4]{2}$, $\alpha_3 = -\sqrt[4]{2}$, $\alpha_4 = -i\sqrt[4]{2}$ gyökeit is permutálja.

Próbáljuk meg áttekinteni G elemeit. Mivel φ két helyre viheti i-t, négy helyre viheti α_1-et, és ez a két érték, mint láttuk, már meghatározza φ-t, ezért G rendje legfeljebb 8 lehet. Mivel $\alpha_2/\alpha_1 = i$, ezért $\varphi(i) = \varphi(\alpha_2)/\varphi(\alpha_1)$. Ezért $\varphi(\alpha_1)$ és $\varphi(\alpha_2)$ is egyértelműen meghatározza φ-t. Az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ számok egy négyzetet alkotnak a síkon. Belátjuk, hogy G elemei éppen e négyzet szimmetriáinak felelnek meg. Először is vegyük észre, hogy $\alpha_3 = -\alpha_1$, és ezért $\varphi(\alpha_3) = -\varphi(\alpha_1)$. Ez azt jelenti, hogy φ a négyzet átlóját átlóba kell, hogy vigye. Ez a csúcsok 24 lehetséges permutációjából könnyen láthatóan kizár 16-ot, és pont azt a nyolcat hagyja meg, amik a négyzet szimmetriáinak felelnek meg. Még azt kell belátni, hogy ez a nyolc permutáció tényleg a bővítés automorfizmusát adja.

Tekintsük például az (13) permutációt. Ehhez olyan φ kell, hogy tartozzon, amire $\varphi(\alpha_1) = \alpha_3 = -\sqrt[4]{2}$, $\varphi(\alpha_3) = \alpha_1$, az α_2 és α_4 pedig fixen marad. Innen $\varphi(i) = \alpha_2/\alpha_3 = -i$. Ezért a fenti képletből

$$\varphi(\beta) = a - b\sqrt[4]{2} + c(\sqrt[4]{2})^2 - d(\sqrt[4]{2})^3 - ei + fi\sqrt[4]{2} - gi(\sqrt[4]{2})^2 + hi(\sqrt[4]{2})^3\,.$$

Ez a képlet tehát egy φ függvényt definiál az L testen, és azt kellene belátni, hogy ez tényleg egy relatív automorfizmus. Ez elvégezhető lenne sok számolással. Gyorsabb azonban a következő út. Az alaptétel miatt tudjuk, hogy ennek a nyolcadfokú normális bővítésnek a Galois-csoportja nyolcelemű. De azt már beláttuk, hogy G-nek legfeljebb nyolc eleme lehet. Ezért ez a nyolc lehetőség meg is kell, hogy valósuljon, tehát a fenti négyzet minden szimmetriájához kell hogy tartozzon egy relatív automorfizmus. Tehát speciálisan a fenti φ függvény is automorfizmus kell, hogy legyen.

Így tehát azt kaptuk, hogy $G \cong D_4$. A közbülső testek meghatározásához az egyes automorfizmusok fixpontjait kell megkeresni. Például az előbbi φ-nek azok a β elemek a fixpontjai, melyekre $\varphi(\beta) = \beta$. Mivel β fenti felírása egyértelmű, azt kapjuk, hogy $b = -b$, $d = -d$, $e = -e$, $g = -g$, azaz φ fixpontjai az $a + c(\sqrt[4]{2})^2 + fi\sqrt[4]{2} + hi(\sqrt[4]{2})^3$ alakú számok. Könnyen láthatjuk, hogy ezek éppen a $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$ test elemei. Ez a közbülső test tehát éppen az $\{id, (13)\}$ részcsoportnak felel meg.

Utólag, az eredmény birtokában látjuk, hogy gyorsabban is eljárhattunk volna. Tudjuk, hogy ennek a kételemű, azaz négy-indexű részcsoportnak az alaptétel szerint olyan közbülső test felel meg, mely negyedfokú $\mathbb{Q}$ felett. De mivel φ fixálja α_2-t, fixálja $\mathbb{Q}(\alpha_2)$-t is. Mivel ez már maga negyedfokú $\mathbb{Q}$ felett, ez kell, hogy legyen a fixpontok halmaza. Hasonló gondolatmenettel láthatjuk be, hogy az $\{id, (24)\}$ részcsoportnak a $\mathbb{Q}(\alpha_1) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ test kell, hogy megfeleljen.

Ezek szerint a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ résztestei az $\{id, (24)\}$-et tartalmazó részcsoportoknak kell, hogy megfeleljenek. Egy ilyen valódi részcsoport elemszáma csak négy lehet, aminek az indexe kettő, és így normálosztó. A D_4 normálosztóit már kiszámoltuk, és innen láthatjuk, hogy csak a $\{id, (24), (13), (13)(24)\}$ jöhet szóba. Ehhez a részcsoporthoz csak a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ közbülső test tartozhat (ellenőrizzük közvetlen számolással is, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ éppen az (13)-hoz és (24)-hez tartozó relatív automorfimusok közös fixpontjainak a halmaza).

Azt a meglepő eredményt kaptuk tehát, hogy a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ bővítésnek az egyetlen valódi közbülső teste a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Ebből következik, hogy minden olyan elemnek a foka négy kell, hogy legyen ($\mathbb{Q}$ felett), ami nincs

benne $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-ben! Hiszen ha α ilyen elem, akkor a $\mathbb{Q}(\alpha)$ csakis $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ lehet. Tehát számolás nélkül látjuk, hogy például $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ foka négy.

Hasonló számolással kapható az összes többi részcsoporthoz is a megfelelő közbülső test:

$$\begin{array}{rr}
\{id\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(i,\sqrt[4]{2}) & \{id,(13)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2}) \\
\{id,(13),(24),(13)(24)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \{id,(24)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \\
\{id,(12)(34),(14)(23),(13)(24)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) & \{id,(13)(24)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(i,\sqrt{2}) \\
\{id,(1234),(13)(24),(1432)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(i) & \{id,(12)(34)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}+i\sqrt[4]{2}) \\
D_4 \longleftrightarrow \mathbb{Q} & \{id,(14)(23)\} \longleftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}-i\sqrt[4]{2})
\end{array}$$

2. Minden másodfokú bővítés Galois-csoportja $\mathbb{Z}_2$, közbülső test csak a két triviális van. Ha ε primitív nyolcadik egységgyökök, akkor $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ Galois-csoportja $\mathbb{Z}_8^\times \cong \mathbb{Z}_2^2$, a nemtriviális közbülső testek $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$. A relatív automorfizmusok hatványozzák ε-t. Az x^6-2 felbontási teste $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2},\eta)$, ahol η hatodik primitív egységgyök. A Galois-csoport a D_6 diédercsoport, az egyes automorfizmusok az x^6-2 polinom gyökeiből álló szabályos hatszög egybevágóságainak felelnek meg. Az $(x^2-2)(x^2-3)$ felbontási teste a $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$, a Galois-csoport a Klein-csoport, az összes résztest pedig $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

3. Nyilván $\mathbb{Z}_2^n$ (mindegyik $\sqrt{p_i}$ a többitől függetlenül vihető az ellentettjébe, vö. II/9. feladat).

4. Legyen $K \le L \le N$, ahol $|L:K|=4$, és N normális bővítése K-nak. Ha a $K \le N$ Galois-csoportja G, és H az L testnek megfelelő részcsoport, akkor tehát $|G:H|=4$, és keressük a H-t tartalmazó valódi részcsoportokat. Ha ilyen legfeljebb egy van, akkor készen vagyunk. Ha van két különböző, mondjuk H_1 és H_2, akkor mindkettő indexe G-ben kettő, és $H_1 \cap H_2$ csak H lehet. Ekkor $H \lhd G$ (mert két normálosztó metszete). Azaz a H-t tartalmazó részcsoportok a G/H összes részcsoportjainak felelnek meg. De G/H vagy ciklikus, vagy a Klein-csoporttal izomorf, és mindkét esetben ismerjük a részcsoportokat. Látjuk, hogy ha $K \le L$ nem normális, akkor legfeljebb egy valódi közbülső test lehet.

5. Legyen ε primitív kilencedik egységgyök, ekkor $\mathbb{Q}(\varepsilon+\overline{\varepsilon})$ jó lesz. Ugyanis $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ Galois-csoportja $\mathbb{Z}_9^\times \cong \mathbb{Z}_6^+$, ez Abel, tehát minden részcsoportja normálosztó, azaz minden közbülső test normális. A $\mathbb{Q}(\varepsilon+\overline{\varepsilon})$ elemeit a másodrendű komplex konjugálás fixen hagyja, tehát ez legfeljebb harmadfokú. De nem elsőfokú, mert $\varepsilon+\overline{\varepsilon}$-nek konjugáltja a tőle különböző $\varepsilon^2+\overline{\varepsilon}^2$ (ezzel beláttuk azt is, hogy $\cos 40^\circ$ irracionális).

10. Ha a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrűben akarunk számolni, akkor minden osztályból egy „ügyes" reprezentánst kell kiválasztani. Nyilván f és g akkor és csak akkor van egy osztályban, ha $f-g \in (x^2+x+1)$, azaz ha f és g ugyanazt a maradékot adja x^2+x+1-gyel osztva. A lehetséges osztási maradékok éppen az $ax+b$ alakú polinomok, ahol $a,b \in \mathbb{Z}_2$, ezekkel kell számolni modulo x^2+x+1. Tehát négy polinomról van szó, legyen $N=0+(x^2+x+1)$, $E=1+(x^2+x+1)$, $A=x+(x^2+x+1)$ és $B=x+1+(x^2+x+1)$. Például $AB=E$ mert $x^2+x=x^2+x+1+1\equiv 1$ (hiszen minden elem kétszerese nulla). A táblák:

$+$	N	E	A	B
N	N	E	A	B
E	E	N	B	A
A	A	B	N	E
B	B	A	E	N

$*$	N	E	A	B
N	N	N	N	N
E	N	E	A	B
A	N	A	B	E
B	N	B	E	A

Testet kaptunk, mert az E egységelem a szorzástábla minden sorában szerepel az elsőt kivéve. A prímtest nyilván $\{N,E\}$, ami a $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf. Az Ex^2+Ex+E polinom gyökei A és B. Mivel ez irreducibilis $\{N,E\}$ felett (másodfokú, és nincs e testben gyöke), ezért ő az A és B közös minimálpolinomja. Az E minimálpolinomja $Ex-E$, az N-é Ex.

A $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1)$ nyolcelemű test lesz, a „jó" reprezentánselemek a legfeljebb másodfokú polinomok. A prímtest kételemű, elemeinek minimálpolinomja a két elsőfokú polinom. A maradék hat elem közül x, x^2 és x^2+x maradékosztályának minimálpolinomja x^3+x+1 lesz, $x+1$, x^2+1 és x^2+x+1-é pedig x^3+x^2+1. A Galois-csoport $\mathbb{Z}_3$, e csoport generátoreleme a test minden elemét négyzetre emeli. Kilencelemű test lesz $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+2)$.