Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév
Harmadik alkalom (2002. október 1–3)

1. *Az alábbiak végrehajtásával határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ test összes résztestét.*
a) *Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ bővítés?*
b) *Normális-e a $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ bővítés?*
c) *Legyen G a b)-beli bővítés Galois-csoportja, és $\varphi \in G$. Mi lehet $\varphi(i)$ és $\varphi(\sqrt[4]{2})$?*
d) *Mutassuk meg, hogy ha $\varphi, \psi \in G$, $\varphi(i) = \psi(i)$, és $\varphi(\sqrt[4]{2}) = \psi(\sqrt[4]{2})$, akkor $\varphi = \psi$.*
e) *Az előző két pont alapján igazoljuk, hogy G elemszáma legfeljebb 8.*
f) *A főtétel alapján mennyi G elemszáma?*
g) *Legyen $\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_2 = i\alpha_1$, $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_4 = -i\alpha_1$. Igazoljuk, hogy ha φ és ψ megegyezik az α_1 és α_2 helyeken, akkor $\varphi = \psi$.*
h) *Mi az összefüggés $\varphi(\alpha_1)$ és $\varphi(\alpha_3)$ között?*
i) *Mutassuk meg, hogy ha az α_1, α_2, α_3, α_4 számokat ebben a sorrendben egy négyzet csúcsaira írjuk, akkor G minden eleme a négyzetnek szimmetriája lesz, és így $G \cong D_4$.*
j) *Legyen $\varphi \in G$ az (13) permutációnak megfelelő eleme G-nek. Írjuk fel $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ egy bázisát $\mathbb{Q}$ felett, egy általános elem képét φ-nél, és φ fixpontjainak halmazát.*
k) *Legyen $H = \{id, (24)\}$. Mely testek felelnek meg a H-t tartalmazó részcsoportoknak?*
l) *Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ minden részteste tartalmazza $\mathbb{Q}$-t.*

2. *A II/15. feladat bővítéseinél mik a Galois-csoportok és a közbülső testek?*

3. *Legyenek $p_1, \ldots, p_k$ páronként különböző pozitív prímszámok. Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{p}_1, \ldots, \sqrt{p}_n)$ Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ felett.*

4*. *Mutassuk meg, hogy ha $K \leq L \leq \mathbb{C}$, és K/L negyedfokú, akkor ennek a bővítésnek kettő, három, vagy öt közbülső teste lehet.*

5*. *Adjuk meg $\mathbb{Q}$-nak egy harmadfokú, normális bővítését.*

∞******.** *Igaz-e, hogy minden véges G csoporthoz van $\mathbb{Q}$-nak olyan normális bővítése, melynek Galois-csoportja G-vel izomorf? (Ez híres* **megoldatlan probléma**, *az állítást Safarevics belátta akkor, ha G feloldható).*

---

6. *Készítsük el az alábbi gyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint.* $\mathbb{Z}_8/\{0,4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\}$, $2\mathbb{Z}/(8)$, $2\mathbb{Z}_{16}/(8)$, $\mathbb{Z}/(4)$, $4\mathbb{Z}/(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4,x)$. *(Ha n egész, akkor nR az R gyűrű $\{nr \mid r \in R\}$ részgyűrűjét jelöli.)*

7. *Tekintsük azt az $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ izomorfizmust, amelyet úgy kapunk, hogy a homomorfizmus-tételt alkalmazzuk az $f \mapsto f(i)$ homomorfizmusra. Mi az $x+1$, x^2, $ax+b$ polinomok maradékosztályainak a képe?*

8. *Igazak-e az alábbi gyűrű-izomorfizmusok? $\mathbb{R}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{C}$; $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $\mathbb{G}/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$; $\mathbb{G}/(3)$ és a kilenc elemű test. (Itt $\mathbb{G}$ a Gauss-egészek gyűrűje.)*

9. *A $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$ gyűrűben mi az $x + (x^2+x+1)$ inverze?*

10. *Legyen $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$. Határozzuk meg az L elemszámát, írjuk fel a műveleti tábláit, igazoljuk, hogy testet kaptunk, keressünk benne $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf $\{E, O\}$ résztestet, és adjuk meg L-ben az $Ex^2 + Ex + E$ polinom gyökeit. Oldjuk meg az analóg feladatot $x^3 + x + 1$-re is. Keressünk ezzel a módszerrel kilenc elemű testet.*