Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Második alkalom (2002. szeptember 24–26)

1. *Lineárisan független-e* $\{1, i, \sqrt{2}+3i\}$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett;* $\{1, i, \sqrt{2}+3i\}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett;* $\{1, \pi, 1/\pi\}$ *a* $\mathbb{Q}$ *felett?*

2. *Felírható-e* $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ *alakban a* $\sqrt[6]{2}$ *illetve a* $\sqrt{2}$, *ahol* a, b, c *racionális számok?*

3. *Határozzuk meg* $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}|$ *értékét.*

4. *Mutassuk meg, hogy ha* $K \leq L$ *egy testbővítés,* $\alpha, \beta \in L$, *és* $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ *és* $\mathrm{gr}_K(\beta)$ *relatív prímek, akkor* $|K(\alpha, \beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

5. *Határozzuk meg* $\sqrt[4]{2}$ *fokát a* $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ *és a* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ *felett.*

6. *Legyen* θ *nem valós gyöke az* $x^3 - 2$ *polinomnak. Határozzuk meg* θ *fokát* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *felett, és a* $\mathbb{Q}(\theta) \cap \mathbb{R}$ *testet. Igaz-e, hogy ha* $K \leq L \leq M$, *és* $\alpha \in M$, *akkor* $\mathrm{gr}_L(\alpha) \mid \mathrm{gr}_K(\alpha)$*?*

7. *Számítsuk ki az alábbi fokszámokat: a)* $|\mathbb{Q}(\cos 23° + i \sin 23°) : \mathbb{Q}|$*; b)* $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}|$*; c)* $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *felett; d)* $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}$ *felett.*

8. *Legyen* K *részteste* $\mathbb{C}$*-nek, és* b, c *racionális számok. Tegyük fel, hogy* $\sqrt{b} \in K(\sqrt{c})$. *Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $\sqrt{b} \in K$, *vagy* $\sqrt{b/c} \in K$.

9. *Legyen* b *négyzetmentes racionális szám (azaz két négyzetmentes egész hányadosa), és* $p_1, \ldots, p_n$ *prímek. Tegyük fel, hogy* $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. *Bizonyítsuk be, hogy* b *kanonikus alakjában csak* $p_1, \ldots, p_n$ *szerepelhet. Ennek alapján mutassuk meg, hogy a prímszámok négyzetgyökei lineárisan függetlenek* $\mathbb{Q}$ *felett.*

---

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha* a *és* b *valós, akkor* $a + bi$ *pontosan akkor algebrai (*$\mathbb{Q}$ *felett), ha* a *is és* b *is az.*

11. *Az alábbi számok közül melyek algebraiak, és melyek transzcendensek:* $\pi + 3$, $5\pi + 6$, $\pi + \sqrt{2}$, $\pi^2 + 2\pi + 2$, $\sqrt{\pi}$.

12. *Egy algebrai szám és egy transzcendens szám összege mikor algebrai? És a szorzatuk? Egy algebrai szám négyzete lehet-e transzcendens? És a négyzetgyöke?*

13. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Q}$ *egyetlen véges bővítése sem lehet algebrailag zárt. Mutassuk meg, hogy a* $\mathbb{Z}_p$ *test nem algebrailag zárt. Melyek az algebrailag zárt véges testek?*

14. *Igazoljuk, hogy algebrai bővítések egymásutánja is algebrai.*

---

15. *Határozzuk meg az alábbi polinomok felbontási testének fokát* $\mathbb{Q}$ *felett:* $x^2 + 1$, $x^4 - 1$, $x^4 + 1$, $x^6 - 1$, $x^6 - 2$, $(x^2 - 2)(x^3 - 2)$, $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$.

16. *Mutassuk meg, hogy minden másodfokú bővítés normális.*

17. *Mutassuk meg, hogy ha* $K \leq L \leq M$, *és* M/K *normális, akkor* M/L *is az.*

18**.** *Tegyük fel, hogy* α *és* β *komplex számok, melyek* $\mathbb{Q}$ *feletti foka relatív prím. Következik-e ebből, hogy* $\alpha + \beta$ *foka* α *és* β *fokainak szorzata?*