Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Kilencedik alkalom

1. *Az AB, BA, BC, $CB-C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}.$$

2. *Végezzük el az alábbi szorzást:*

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

3. *Jelölje $E^{(i,j)}$ azt a 3×3-as mátrixot, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, a mátrix összes többi eleme pedig 0. Mi történik, ha egy 3×3-as M mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(i,j)}$-vel?*

4. *Van-e olyan 3×3-as A mátrix, amellyel a bal illetve a jobb oldalról történő szorzás tetszőleges 3×3-as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X összes többi elemét pedig ellentettjére változtatja?*

5. *Adjunk meg olyan 10×10-es $A\neq B$ mátrixokat és egy 10×100-as $C\neq \mathbf{0}$ mátrixot, amelyekre $AC=BC$ teljesül.*

6. *Tegyük fel, hogy a 10×10-es A és B mátrixokra $AC=BC$ teljesül* **minden** *10×100-as C mátrix esetén. Mutassuk meg, hogy akkor $A=B$.*

7. *Számítsuk ki az 5×5-ös N mátrix első öt hatványát, ahol*

$$N_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{ha } i-j=1;\\ 0, & \text{ha } i-j\neq 1.\end{cases}$$

8*. *Tegyük fel, hogy egy $n\times n$-es M mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $M_{i,j}=0$ ha $i\geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n=\mathbf{0}$.*

---

9. *Legyenek A és B $n\times n$-es mátrixok, $n>0$ egész. Jelöljük az $AB-BA$ mátrixot K-val. Számítsuk ki a $\sum_{i=1}^{n}K_{i,i}$ összeget. (Ezt az összeget a K mátrix* **nyomának** *nevezzük.)*

10. *Az M és N mátrixok* **felcserélhetők,** *ha $MN=NM$. Határozzuk meg azokat a kétszer kettes mátrixokat, amelyek minden kétszer kettes mátrixszal felcserélhetők.*

11. *Mutassuk meg, hogy*

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^2-(a+d)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

12. *Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2=-E$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2=E$ egyenlet összes megoldását. (E az egységmátrix.)*

13. *Számítsuk ki a következő hatványokat, tetszőleges pozitív egész n kitevővel (α valós paraméter):*

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n,\qquad \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n.$$