Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Nyolcadik alkalom

1. *A Horner elrendezés segítségével döntsük el, hogy az* $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ *polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel* $f(x)$*-et* $(x-2)g(x) + f(2)$ *alakban.*

2. *Oldjuk meg az* $x^4 + 5x^2 + 6x + 13 = 0$ *egyenletet a tanult módszerrel.*

3. *Igaz-e a* $2x \mid 3x^2$ *oszthatóság rendre a* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *feletti polinomok körében?*

4. *Legyen* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *egy* n*-edfokú polinom, ahol* $n \geq 1$, p *egy prímszám, és* $0 < k < n$. *Legyen* $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ *az* f *modulo* p *véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha* f *irreducibilis* $\mathbb{Z}$ *felett, akkor* $\overline{f}$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}_p$ *felett.*
b) *Ha* $\overline{f}$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}_p$ *felett, akkor* f *irreducibilis* $\mathbb{Z}$ *felett.*
c) *Ha* $\overline{f}$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}_p$ *felett, akkor* f *irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett.*
d) *Ha* $\overline{f}$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}_p$ *felett, és* $\overline{f}$ *foka* n, *akkor* f *irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett.*
e) *Ha* f*-nek van* $\mathbb{Z}$ *felett* k*-adfokú tényezője, akkor* $\overline{f}$*-nak is van* k*-adfokú tényezője.*
f) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy* $\overline{f}$ *foka* n.

5. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*

a) $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett* $x^7 + x + 1$, $x^2 - 2$, $x^2 + x + 1$.
b) $\mathbb{Q}$ *felett* $3x^7 - x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16} + 1$, $x^{16} + 2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^5 + 4$.
c) $\mathbb{Z}$ *felett* $x^4 + 2x + 27$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^6 + 1$, $x^3 + 7x - 3$, $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$.
d) $\mathbb{Z}_2$ *felett* $x^8 + x^2 + 1$, $x^5 + x + 1$, $x^5 + x^4 + x^3 + 1$, $x^5 + x^3 + 1$.
e) $\mathbb{Z}_{17}$ *felett* $x^2 + 1$, $x^4 + 1$, $x^8 + 1$, $x^{17} + 1$, $x^{17} + 2$.

6. *Fogalmazzuk meg precízen, és bizonyítsuk is be, milyen értelemben egyértelmű egy egész együtthatós polinom felbontása egy egész szám és egy primitív polinom szorzatára. Mennyiben egyértelmű egy racionális együtthatós polinom felbontása egy racionális szám, és egy (egész együtthatós) primitív polinom szorzatára?*

7. *Tegyük fel, hogy* f *és* $g \neq 0$ *egész együtthatós polinomok. Igaz-e, hogy* g *akkor és csak akkor osztója* f*-nek* $\mathbb{Z}[x]$*-ben, ha az* $f : g$ *maradékos osztást* $\mathbb{Q}[x]$*-ben elvégezve a hányados egész együtthatós, és a maradék nulla?*

8. *Állapítsuk meg az* $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ *és a* $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ *polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a számelméletben tanult visszahelyettesítési eljárással)* $fp + gq$ *alakban, ahol* p *és* q *alkalmas polinomok. Függ-e az eredmény attól, hogy ezeket a polinomokat* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ *vagy* $\mathbb{Q}$ *felett tekintjük-e?*

9. *Számítsuk ki* $x^n - 1$ *és* $x^k - 1$ *legnagyobb közös osztóját.*

10. *Mely polinom gyökei lesznek az* $x^5 - 3x^4 + 5$ *gyökeinek reciprokai?*

11. *Egy egész együtthatós polinom minden egész helyen páros értéket vesz fel. Igaz-e, hogy a polinom osztható kettővel (mint konstans polinommal)?*

12*. *Legyen* f *valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy* f *előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*