Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Hetedik alkalom

Módszerek az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett:

- Egy nem konstans polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és primitív.
- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha nincs racionális gyöke (használjuk a racionális gyöktesztet).
- Bontsuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ felett, és használjuk a felbontás egyértelműségét.
- A Schönemann-Eisenstein kritérium.
- f akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in \mathbb{Q}$) az.
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám.

1. *Egy T test feletti n-edfokú polinomot* **normált***nak hívunk, ha benne x^n együtthatója 1 (a T egységeleme). Lássuk be, hogy egy T fölötti legalább elsőfokú normált polinom egyértelműen bontható fel T fölötti normált irreducibilis polinomok szorzatára (eltekintve persze a tényezők sorrendjétől).*

2. *Bontsuk fel az x^4+9 polinomot $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis polinomok szorzatára.*

3. *Legyen c pozitív egész szám. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy $x^4 - c$ irreducibilis legyen $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{Q}$ fölött? Mi a helyzet negatív c esetén?*

4. *Bontsuk fel az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinomot $\mathbb{R}$ felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ feletti felbontást is.*

5. *Bontsuk $\mathbb{Z}$ felett felbonthatatlanok szorzatára a $30x^2+24$ és $10x^2+15x+6$ polinomokat.*

6. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium: $x^{11} + 2x + 18$, $x^{11} + 2x + 12$, $x^{11} + 12x + 5$, $x^{11} + n$ ($n = ?$).*

7. *Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, és p prím. Tegyük fel, hogy az $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ együtthatók mindegyike osztható p-vel, a_0 nem osztható p-vel, és a_n nem osztható p^2-tel. Igazoljuk, hogy ha $\deg f > 0$, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

8. *Irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett $x^3 + 3$, $x^3 - 4$, $x^{10} + 10$, $x^4 + 1$, $x^4 + 2$, $2x^4 + 2x^2 + 1$, $x^3 + 9$, $x^6 - 10x + 10$, $x^4 + x^3 + x^2 + 1$?*

9. *Van-e olyan legalább másodfokú $\mathbb{Q}[x]$-beli f polinom, amelyhez tetszőleges r racionális számot adva, a kapott $f + r$ polinom mindig irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett?*

10*. *Van-e olyan legalább másodfokú $\mathbb{Q}[x]$-beli f polinom, amelyhez tetszőleges r racionális számot adva, a kapott $f + r$ polinom sohasem irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett?*

11*. *Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ egymástól különböző egész számok. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

12*. *Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ egymástól különböző egész számok. Mutassuk meg, hogy ha n páratlan, akkor az $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

13*. *Legyen f valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy f előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*