Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Hatodik alkalom

1. *Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$ olyan n-edfokú polinom, melynek i hatszoros gyöke. Lehet-e $n = 10$? Adjuk meg az összes ilyen polinomot, melynek foka 12. Mutassuk meg, hogy ha $g \in \mathbb{R}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor α és $\overline{\alpha}$ ugyanannyiszoros gyöke g-nek.*

2. *Bontsuk fel a következő polinomokat az $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinomok szorzatára: $x^4 - 1$, $x^6 - 4x^3 + 3$, $x^4 + 1$, $x^4 + 4$.*

3. *Írjuk fel az összes legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2[x]$-ben.*

4. *Bontsuk fel a $\mathbb{Z}_2[x]$-beli $x^6 + x^2 + x + 1$ polinomot $\mathbb{Z}_2[x]$-beli irreducibilisek szorzatára.*

5. *Adjunk meg olyan 2001-edfokú polinomot $\mathbb{Z}_2[x]$-ben, amelynek nincsen gyöke $\mathbb{Z}_2$-ben.*

6*. *Legyen n pozitív egész. Hányszoros gyöke a $\mathbb{Z}_2[x]$-beli $x^n + 1$ polinomnak az 1?*

7. *Legyen T test, $a_1, \ldots, a_n$ egymástól különböző elemek T-ben, és $1 \leq k \leq n$ esetén*

$$\ell_k = \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \ldots (x - a_n)}{(a_k - a_1) \ldots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \ldots (a_k - a_n)} .$$

a) Legyenek $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges elemek T-ben. Adjunk meg olyan $T[x]$-beli f polinomot (a fenti ℓ_i polinomok segítségével) amelyre $f(a_k) = c_k$ teljesül minden $1 \leq k \leq n$-re. Hány ilyen polinom van az n-nél kisebb fokú polinomok körében?

b) Határozzuk meg („zárt alakban") az $\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n$ összeget.

8. *Legyen n pozitív egész. Az n-edik komplex egységgyökök közül minden lehetséges módon kiválasztunk három különbözőt, és ezeket összeszorozzuk. Mi az összege ezeknek a szorzatoknak?*

9. *Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

10. *Legyen p prímszám.*

a) Írjuk föl a $\mathbb{Z}_p[x]$-beli $x^{p-1} - 1$ polinomot gyöktényezős alakban.

b) Adjunk a fenti gyöktényezős alak segítségével új bizonyítást a Wilson tételre.

c) Az előbbi módszerrel számítsuk ki az $1^2 + 2^2 + \cdots + (p-1)^2$ összeg maradékát mod p.

11. *Bizonyítsuk be, hogy egy $x^{18} + 3x^{17} + 100x^{16} + a_{15}x^{15} + \ldots + a_1x + a_0$ alakú polinomnak nem lehet minden komplex gyöke valós.*

12. *Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom (komplex) gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a+b$, $a+c$, $b+c$. (Eredmény: $x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ illetve $x^3 + 3x - 1$.)*

13. *Milyen összefüggést kell kielégíteniük a komplex együtthatós $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinom együtthatóinak ahhoz, hogy a polinom*

a) valamelyik gyöke megegyezzen a másik két gyök összegével;

b) valamelyik gyöke megegyezzen a másik két gyök szorzatával;

c) gyökei számtani sorozatot alkossanak?

---

14. *Osztható-e a $\mathbb{C}[x]$-beli $4x^{2000} + 4x^{1111} + 5x^{762} - 1$ polinom $x^2 \pm x + 1$-gyel?*