Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Ötödik alkalom

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*

a) $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$.

b) $(x^2 + ix + 3)(x^2 + i)$.

2. *Írjuk fel az összes polinomfüggvényt $\mathbb{Z}_2$ fölött. Nullosztómentes gyűrűt alkotnak-e ezek?*

3. *Döntsük el, hogy az $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x) + f(2)$ alakban.*

4. *Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1?*

5. *Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.*

6. *Írjuk fel az $x^3 - 1$, az $x^2 - x + 1$ és az $x^4 - x^2 + 1$ polinomokat gyöktényezős alakban. Honnan ismerősek a gyökök?*

7. *Írjuk fel az $x^4 + 4$ polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

8. *Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú komplex együtthatós polinom n (komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

9. *Legyenek $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ az összes n-edik egységgyökök.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy $x^n - 1 = (x - \varepsilon_1) \ldots (x - \varepsilon_n)$.*

b) *Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

Gyakorló feladatok

10. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{10}$ gyűrű invertálható elemeit. Általánosítsuk a feladatot.*

11. *Gyűrűt ill. testet alkotnak-e azok a racionális számok (a racionális számok szokásos összeadására és szorzására) amelyek felírhatók olyan tört alakban, amelynek*

a) *a nevezője páratlan;*

b) *a nevezője 2-hatvány;*

c) *a számlálója páros, a nevezője pedig páratlan?*

Van-e egységelem, és (ha van, erre nézve) mely elemeknek létezik inverze?

12. *Gyűrűt alkotnak-e a páros fokú valós együtthatós polinomok és a nullapolinom a polinomok szokásos műveleteire?*

13. *Írjuk fel az $x^n + 1$ és az $x^{2n} - x^{2n-1} + - \cdots - x + 1$ polinomokat gyöktényezős alakban.*

14. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x : 2$ maradékos osztás?*

15. *Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

16. *Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 - 1$-gyel illetve $x^2 + 1$-gyel?*

17. *Hány olyan elem lehet egy kommutatív testben, melynek négyzete az egységelem?*