Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Negyedik alkalom

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.*

a) $x^3 - 6ix - i + 8 = 0$. (A gyökök $(1+\sqrt{3}/2)+(1/2+\sqrt{3})i$, $(1-\sqrt{3}/2)+(1/2-\sqrt{3})i$, $-2-i$, ehhez $\sqrt{D} = \pm(i/2+4)$, $u = \cos 30° + i\sin 30°$, $v = 2(\cos 60° + i \sin 60°)$.)

b) $x^3 + 12x - 16i = 0$. ($D = 0$, $u = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$, $v = 2(\cos 150° + i\sin 150°)$, $x^3 + 12x - 16i = (x-2i)^2(x+4i)$, azaz a $2i$ kétszeres gyök.)

c) $x^3 - 21x + 20 = 0$ (Számoljunk közelítőleg, scientific kalkulátorral végezve a trigonometrikus alakra való oda- és visszakonvertálást. Ekkor $u = \overline{v} = \sqrt{7}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $\alpha \approx 40.893°$. Ha pontosan számolnánk ez $2 + i\sqrt{3}$ lenne. A gyökök 4, 1 és -5.)

2. *Racionális szám-e* $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$?

3. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.*

a) $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 1$.

b) $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = -1$.

4. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? A kommutatív gyűrűkben határozzuk meg az invertálható elemeket.*

a) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

b) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

c) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol a, b nemnegatív valós, a komplex számok összeadására és szorzására.*

d) *Az $a+b\sqrt{3}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

e) *Az $a+b\sqrt[3]{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a komplex számok összeadására és szorzására.*

f) *A modulo 12 vett páros maradékok a modulo 12 összeadásra és szorzásra.*

g) *Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése (tehát $Y+Z$ elemei azok, melyek Y és Z közül pontosan egyben vannak benne), a szorzás pedig a metszetképzés.*

5. *Végezzük el a $\mathbb{Z}_{17}$ testben a $2/3$ és az $5/12$ osztásokat.*

Gyakorló feladatok

6. *Mi lesz $\sin\alpha + i\cos\alpha$ trigonometrikus alakja?*

7. *Számítsuk ki $(1+\cos x + i\sin x)^n$ értékét.*

8. *Tegyük fel, hogy $z + (1/z) = -\sqrt{2}$. Mennyi $z^{2001} + (1/z^{2001})$?*

9. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges z és w komplex számokra*

a) *zw és z/w pontosan akkor valós, ha z és w valós vagy tisztán képzetes;*

b) *zw és $z+w$ pontosan akkor valós, ha z és w valós vagy konjugáltak;*

c) *$(z+w)/(z-w)$ akkor és csak akkor tisztán képzetes, ha $|z| = |w|$;*

d) *ha z egyszerre 60-adik és 100-adik egységgyök, akkor 20-adik egységgyök;*

e) *ha zw és z/w egységgyök, akkor z és w is az.*

10. *Rajzoljuk le:* $\{z : \arg \frac{z-3}{z+1} = \frac{\pi}{2}\}$, $\{z : z^4 = (\overline{z})^6\}$, $\{z : z^6 = (\overline{z})^6\}$.

11. *Oldjuk meg az $x^3 + 3x + 2 = 0$ és az $x^3 - 12x + 8\sqrt{2} = 0$ egyenleteket $\mathbb{C}$-ben.*