Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Harmadik alkalom

1. *Határozzuk meg a II/3. feladatban szereplő számok rendjét.*

2. *Hogyan függ össze $\overline{\varepsilon}$ illetve $1/\varepsilon$ rendje az ε rendjével?*

3. *Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?*

4. *Mutassuk meg, hogy ha n páratlan pozitív egész, akkor a $2n$-edik primitív egységgyökök épp az n-edik primitív egységgyökök ellentettjei. (Először kis n számokra ellenőrizzük).*

5. *Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?*

6. *Mutassuk meg, hogy ha $n > 0$ egész, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, és $\varepsilon^n = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.*

7. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

8. *Legyenek m és n pozitív egészek.*
- a) *Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ és $x^m = 1$ egyenleteknek?*
- b) *Igazoljuk, hogy egy n-edik és egy m-edik egységgyök szorzata nm-edik egységgyök.*
- c) *Mutassuk meg, hogy egy n-edik és egy m-edik primitív egységgyök szorzata akkor és csak akkor nm-edik primitív egységgyök, ha m és n relatív prímek.*
- d) *Igazoljuk, hogy ha n és m relatív prímek, akkor minden nm-edik primitív egységgyök egyértelműen előáll egy n-edik és egy m-edik primitív egységgggyök szorzataként.*
- e) *Adjunk az eddigiek alapján új bizonyítást arra, hogy az Euler-függvény multiplikatív.*

9. *Határozzuk meg a primitív n-edik egységgyökök szorzatát.*

10. *Tetszőleges n pozitív egészre jelölje $\mu(n)$ a primitív n-edik egységgyökök összegét.*
- a) *Határozzuk meg $\mu(8)$ és $\mu(12)$ értékét.*
- b) *Legyen p prímszám, k pozitív egész, ε pedig egy p^k-adik egységgyök. Mutassuk meg, hogy ε pontosan akkor* **nem** *primitív p^k-adik egységgyök, ha $\varepsilon^{p^{k-1}} = 1$. Ennek alapján határozzuk meg $\mu(p^k)$ értékét.*
- c) *Bizonyítsuk be, hogy a μ függvény multiplikatív, azaz ha m és n relatív prímek, akkor $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.*
- d) *Legyen az n kanonikus alakja $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$. Határozzuk meg $\mu(n)$ értékét.*

11. *Legyenek z_1, z_2, z_3 és z_4 a komplex számsík páronként különböző pontjai*
- a) *Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy z_1, z_2 és z_3 egy egyenesbe essen? (Milyen számnak kell lennie a $(z_2 - z_1)/(z_3 - z_2)$ hányadosnak?)*
- b) *Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy z_1, z_2, z_3 és z_4 egy egyenesen vagy egy körön legyen? (Milyen számnak kell lennie a kettősviszonyuknak, azaz a*

$$(z_1\, z_2\, z_3\, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

  hányadosnak?)
- c) *Igazoljuk Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza rendre a, b, c, d, átlóinak hossza pedig e és f, akkor $ac + bd \geq ef$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a négyszög húrnégyszög.*