Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Második alkalom

1. *Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:* $1+i,\ 1-i,\ \sqrt{3}+i,\ \ -1-\sqrt{3}i,$ $\cos(60°)-i\sin(60°),\ \ \cos(30°)-i\sin(60°)$.

2. *Oldjuk meg az* $x^3=1,\ x^4=-4,\ \ x^8=\sqrt{3}-i,\ x^6=1+i,\ x^n=-1$ *egyenleteket.*

3. *Melyek egységgyökök az alábbi számok közül? Mely* n*-ekre lesznek ezek a számok* n*-edik egységgyökök?* $1,\ -1,\ i,\ 1+i,\ \ (1+i)/\sqrt{2},\ \ \cos(\sqrt{2}\pi)+i\sin(\sqrt{2}\pi),\ \ \cos(336°)+i\sin(336°)$.

4. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

5. *Számítsuk ki* $(1+i)^n$ *értékét. Mivel egyenlő* $1+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\dots$ *?*

6. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin nx$*-et. (Ötlet: a binomiális tétel segítségével számítsuk ki a* $\cos x+i\sin x$ *szám* n*-edik hatványát.)*

7. $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$. *Hol a hiba?*

8. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.*

9. *Tegyük föl, hogy két egységgyök összege is egységnyi hosszúságú. Mit mondhatunk az általuk bezárt szögről? Mutassuk meg, hogy ekkor az összegük ugyancsak egységgyök.*

10. *Képzeljünk el egy doboz „Medve” sajtot abból a fajtából, amelyben hat darab sajt van. Tegyük fel, hogy a hatból három sajtot már megettünk, és a dobozban maradt három sajt is esetleg elmozdult egymáshoz képest úgy, hogy azért a „csúcsuk” továbbra is a doboz középpontjában van, és ívelt oldaluk illeszkedik a doboz kör alakú széléhez. Jelölje a sajtoknak a középpontban levőktől különböző csúcsait — az óramutató járásával megegyező irányban haladva — rendre* A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 . *Mutassuk meg, hogy az* A_2B_1 , B_2C_1 , C_2A_1 *szakaszok felezőpontjai szabályos háromszöget határoznak meg.*

Megoldás az I/7. feladatra. Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, $\varepsilon=\cos 120°+i\sin 120°$, $\eta=\cos 60°+i\sin 60°$. A szabályos hatszög felrajzolásából látjuk, hogy $\eta=1+\varepsilon$. Ha X jelöli az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög középpontját, akkor az $\overrightarrow{XB}$ vektort 120 fokkal elforgatva az $\overrightarrow{YB}$ adódik, azaz $(B-X)\varepsilon=A-X$, ahonnan

$$X=\frac{A-B\varepsilon}{1-\varepsilon},\quad \text{és hasonlóan}\quad Y=\frac{B-C\varepsilon}{1-\varepsilon},\quad Z=\frac{C-A\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{XY}$ vektort $60°$-kal elforgatva az $\overrightarrow{XZ}$-t kapjuk, azaz $(Y-X)\eta=(Z-X)$. A fentieket behelyettesítve és $1-\varepsilon$-nal szorozva:

$$((B-C\varepsilon)-(A-B\varepsilon))\,\eta=(C-A\varepsilon)-(A-B\varepsilon)\,.$$

Beírva, hogy $\eta=1+\varepsilon$, és átrendezve

$$A((-1-\varepsilon+\varepsilon+1)+B(1+\varepsilon+\varepsilon(1+\varepsilon)-\varepsilon)+C(-\varepsilon(1+\varepsilon)-1)=0\,.$$

Ez pedig teljesül, mert $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ (mint a hatszögről leolvasható), és így A, B és C együtthatója is nulla.