Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Tizenegyedik alkalom

1. *Adjuk meg az alábbi permutációk inverziószámát és előjelét.*

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&5&6&1&4&3&8&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&6&4&8&3&2&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\c&a&e&b&d\end{pmatrix}$$

2. *Határozzuk meg az $\{1,2,\ldots,100\}$ halmaz alábbi permutációiban az inverziók számát:*
a) Előről hátra: $f(i)=101-i$;
b) Utolsó pár előre fuss: $f(i)=i+1$ ha $i<100$ és $f(100)=1$;
c) $f(i)=2i$ ha $1\le i\le 50$ és $2(i-50)-1$ ha $51\le i\le 100$;
d) $f(i)=2i$ ha $1\le i\le 50$ és $2(100-i)+1$ ha $51\le i\le 100$.

3. *Legyen f az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz egy permutációja, és legyen g az a permutáció, amelyre $g(i)=n+1-f(i)$. Mi a kapcsolat f és g inverzióinak száma között?*

4*. *Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmaz egy permutációjának inverziószáma bármilyen $n(n-1)/2$-nél nem nagyobb (nemnegatív egész) szám lehet, de ennél nagyobb nem.*

5. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

6. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a definíció alapján és Gauss-eliminációval is.*

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&3&5\\2&5&9\\3&2&1\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{vmatrix}$$

7. *Számítsuk ki a következő $n\times n$-es mátrixok determinánsát.*
a) A főátlóban $d_1,\ldots d_n$ van, másutt nulla.
b) A főátlóban $d_1,\ldots d_n$ van, felette bármi, alatta nulla.
c) A főátló feletti ferde sorban $d_1,\ldots d_{n-1}$ van, a bal alsó sarokban d_n, másutt nulla.
d) Az i-edik sor j-edik eleme $i+j$.
e) Az i-edik sor j-edik eleme ij.
f) A főátlóban végig b van, másutt mindenütt c.
g) A főátlóban végig 2 van, a mellette levő két ferde sorban 1, másutt nulla.
h) A főátló végig b, a mellékátló végig c, itt n páros.
i) A főátlóban álló elemek rendre $1,0,0,\ldots,0,2$, a főátló fölött minden elem 1-es, az első oszlop minden eleme 1-es, a többi elem nulla.

8. *Hogyan változik egy $n\times n$-es mátrix determinánsa, ha megfordítjuk az oszlopok sorrendjét; ha tükrözzük a mellékátlójára; ha plusz kilencven fokkal elforgatjuk?*

9. *Igazoljuk, hogy ha egy $n\times n$-es mátrixban van egy $m\times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m+k>n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

10. *Igazoljuk, hogy ha egy páratlan sok sorból álló négyzetes mátrixban a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egymás ellentettjei, akkor a determinánsa nulla. Mi történik, ha a feltevést úgy módosítjuk, hogy a megfelelő elemek egymás konjugáltjai legyenek?*