Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Tizedik alkalom

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned} \qquad \textit{HF:} \quad \begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t darab (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

Homogén	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

3. *Az alábbi sormátrixok halmazából válasszunk ki minél több elemű lineárisan független rendszert:* $\underline{a} = [1,2,4]$, $\underline{b} = [1,1,2]$, $\underline{c} = [0,1,2]$, $\underline{d} = [0,0,3]$.

4. *Döntsük el, hogy az alábbi rendszerek lineárisan függetlenek-e, összefüggők-e, illetve lehetnek-e ilyenek is és olyanok is:*

a) *lineárisan független rendszerből elhagyunk egyet;*
b) *lineárisan független rendszerhez hozzáveszünk egyet;*
c) *lineárisan összefüggő rendszerből elhagyunk egyet;*
d) *lineárisan összefüggő rendszerhez hozzáveszünk egyet;*
e) *a rendszer egyik eleme egy másiknak a négyszerese;*
f) *a rendszer egyik eleme két másiknak az összege;*
g) *a rendszer egyik eleme a csupa nullából álló oszlopmátrix.*

5. *Oldjuk meg a következő egyenleteket:*

$$x\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\10\end{bmatrix}, \qquad x\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-7\\2\end{bmatrix},$$

$$x\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-7\\4\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1&2&4\\3&5&6\end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

6. *Legyen $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lineárisan független rendszer. Függetlenek-e az alábbi rendszerek?*

a) $\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \ldots + \underline{a}_n\,,\ \underline{a}_2 + \ldots + \underline{a}_n\,,\ \ldots\,,\ \underline{a}_{n-1} + \underline{a}_n\,,\ \underline{a}_n\,;$
b) $\underline{a}_1 - \underline{a}_2\,,\ \underline{a}_2 - \underline{a}_3\,,\ \ldots\,,\ \underline{a}_{n-1} - \underline{a}_n\,,\ \underline{a}_n - \underline{a}_1\,;$
c) $\underline{a}_1 - \underline{a}_2\,,\ \underline{a}_2 - \underline{a}_3\,,\ \ldots\,,\ \underline{a}_{n-1} - \underline{a}_n\,;$
d) $\underline{a}_1 + \underline{a}_2\,,\ \underline{a}_2 + \underline{a}_3\,,\ \ldots\,,\ \underline{a}_{n-1} + \underline{a}_n\,,\ \underline{a}_n + \underline{a}_1\,;$
e) $\underline{a}_1 - \underline{a}_2\,,\ \underline{a}_2 - \underline{a}_3\,,\ \ldots\,,\ \underline{a}_{n-1} - \underline{a}_n\,,\ \underline{a}_n\,.$