Matematikus szak, második évfolyam, második félév

Második zárthelyi — megoldásvázlatok

1. Ha a komplementuma a' és b komplementuma b', akkor $a \vee b$ komplementuma $a' \wedge b'$ és $a \wedge b$ komplementuma $a' \vee b'$. A disztributivitás miatt ugyanis

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = ((a \wedge a') \vee (b \wedge a')) \wedge b' = b \wedge a' \wedge b' = 0\,.$$

Dualizálva, illetve $a \leftrightarrow a'$ és $b \leftrightarrow b'$ cserével a többi állítás is következik.

2. Például az M_3 háló alá odarajzolunk egy új nullelemet. Ennek kongruenciahálója a négyelemű Boole-algebra.

3. Legyen $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$, ekkor $2\cos\alpha = \varepsilon + \overline{\varepsilon}$. Ez algebrai egész, ha tehát racionális is, akkor egész szám. Mivel $|2\cos\alpha| \leq 2$, ez az egész szám csak $0, \pm 1, \pm 2$ lehet. A megfelelő szögek a közismert $\pm 90°$, $\pm 60°$, $\pm 120°$, $0°$, $180°$.

4. Egy p/q tört akkor van a radikálban, ha $1 - sp/q$ invertálható minden s-re, azaz nem gyöke sem 1, sem -1. Ha p/q ilyen tört, de $p(1) \neq 0$ lenne, akkor válasszuk s-et konstans $q(1)/p(1)$-nek, ekkor az 1 mégiscsak gyök lenne, ami ellentmondás. Ha tehát p/q a radikálban van, akkor $p(1) = 0$, és hasonlóan $p(-1) = 0$. Megfordítva, ha $p(1) = p(-1) = 0$, akkor $1 - sp/q$-nak nyilván nem gyöke ± 1, és így p/q a radikálban van (3 pont). A radikál szerinti faktor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-rel izomorf. Valóban, a $p/q \mapsto (p(1)/q(1), p(-1)/q(-1))$ homomorfizmus, aminek magja nyilván a radikál, és ami már a polinomok részgyűrűjén is köztudottan szürjektív.

5. Tegyük fel, hogy J nemtriviális ideálja I-nek. Ekkor $J \subseteq RJR \subseteq I$, és RJR ideálja R-nek, így I minimalitása miatt $RJR = I$. De ekkor

$$I^3 = (RJR)(RJR)(RJR) = (RJRR)J(RJRR) \subseteq IJI \subseteq J$$

hiszen J ideál I-ben. Viszont I^3 ideál R-ben, és így csak nulla lehet. Ekkor viszont már I^2 is nulla, hiszen ez is ideál.

6. Vegyünk egy négyelemű láncot, és 1997 darab háromelemű láncot. Csípjük össze ezeket a legnagyobb és a legkisebb elemüknél fogva. A kapott háló kongruenciahálója a háromelemű lánc, a nemtriviális kongruencia a négyelemű lánc két középső elemét ejti össze.