Matematikus szak, második évfolyam, második félév

Első zárthelyi — megoldásvázlatok

1. Ha $c \in C$, akkor, mivel β szürjektív, van olyan $b \in B$, hogy $\beta(b) = c$. Legyen $\theta(c) = \beta'\psi(b)$. Meg kell mutatni, hogy ez jóldefiniált. Ha $\beta(b') = c$, akkor $\beta(b - b') = 0$, ezért az első sor egzaktsága miatt van olyan $a \in A$, hogy $\alpha(a) = b - b'$. Ekkor $\beta'\psi(b - b') = \beta'\psi\alpha(a) = \beta'\alpha'\varphi(a) = 0$, hiszen $\beta'\alpha' = 0$ az alsó sor egzaktsága miatt.

2. Az ideálban azok a polinomok vannak, melyek konstans tagja nyolccal, x-es tagjának együtthatója néggyel, a többi tag együtthatója 2-vel osztható. Ezért a keresett felbontás $(2) \cap (x^2, 4x, 8)$, a radikálok (2) és $(2, x)$. Az $(x^2, 4x, 8)$ ideál primér, mert a radikálja maximális ideál.

3. Tudjuk, hogy $\mathbb{Z}_n^+ \otimes A \cong A/nA$, ahol minden elem $k \otimes a$ alakú, és $k \otimes a \longleftrightarrow ka + nA$. Mivel $(\varphi \otimes 1_A)(k \otimes a) = \varphi(k) \otimes a$, azt kell megnézni, hogy a $ka + 2A \mapsto \varphi(k)a + 6A$ leképezés mikor lesz injektív. Vagyis hogy $3a \in 6A$-ból milyen A esetén következik tetszőleges $a \in A$-ra, hogy $a \in 2A$. De ez minden A-ra igaz, hiszen ha $3a = 6b$, akkor $a = 6b - 2a \in 2A$.

4. Nem. Tekintsük a $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ identikus beágyazást. Ha $\mathbb{Z}[x]$ injektív lenne, akkor létezne olyan $\psi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Z}[x]$, melyre $\psi\varphi$ a $\mathbb{Z}[x]$ identitása. Legyen $f = \psi(1/2)$, akkor $2f = \psi(1) = \psi\varphi(1) = 1$, ilyen polinom pedig nincs $\mathbb{Z}[x]$-ben.

5. Nyilván $\cos k^\circ + i \sin k^\circ$ rendje $n = 360/(k, 360)$. Legyen ε egy n-edik, η pedig egy $3n$-edik primitív egységgyök, kiszámítjuk η fokát $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ fölött. Nyilván η^3 rendje n, tehát ε hatványa η-nak, és így $\mathbb{Q}(\eta) \geq \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Mivel ez normális bővítés (hiszen η konjugáltjai hatványai η-nak már $\mathbb{Q}$ fölött is), a szerkesztés akkor és csak akkor végezhető el, ha a bővítés foka, azaz $\varphi(3n)/\varphi(n)$, kettőnek hatványa. Ez a hányados $\varphi(3) = 2$, ha $3 \nmid n$, különben pedig 3, vagyis a szerkesztés pontosan akkor végezhető el, ha n nem osztható hárommal, azaz ha $9 \mid k$.

6. A karakterisztika kettő, és így $x^{20} - 1 = (x^5 - 1)^4 = (x - 1)^4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^4$. Tehát elegendő azt megmutatni, hogy $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ két (másodfokú) irreducibilis polinom szorzatára bomlik a négyelemű test fölött (és akkor az eredmény $4(1 + 2) = 12$). Legyen $K \leq L$ a négyelemű illetve a 16 elemű test. Ez utóbbinak a multiplikatív csoportja $\mathbb{Z}_{15}^+$, és így L-ben az $x^5 - 1$-nek öt különböző gyöke van, vagyis lineáris tényezőkre bomlik. Az öt gyökből a négy ötödrendű elem lesz $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$-nek is gyöke. Ezek nincsenek K-ban, és ezért minimálpolinomjuk másodfokú K fölött.