Matematikus szak, második évfolyam, második félév

Első zárthelyi

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Mindegyik feladat hat pontot ér, az osztályzat elégtelen, ha nincs lényegében megoldott feladat (azaz ami legalább öt pontot kapott), különben pedig az összpontszám hatodrészének egész része.

1. *Az alábbi diagramm kommutatív, és a sorai egzaktak.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Mutassuk meg, hogy van olyan $\theta : C \to C'$ modulus-homomorfizmus, ami a diagrammot kommutatívvá teszi.

2. *Bontsuk fel primér ideálok metszetére a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrű $(2x^2, 4x, 8)$ ideálját, és adjuk meg a tényezők radikáljait.*

3. *Legyen $\varphi : \mathbb{Z}_2^+ \to \mathbb{Z}_6^+$ az a homomorfizmus, melynél $\varphi(1) = 3$. Mely A Abel-csoportokra injektív a $\varphi \otimes 1_A : \mathbb{Z}_2^+ \otimes A \to \mathbb{Z}_6^+ \otimes A$ homomorfizmus?*

4. *Injektív-e $\mathbb{Z}[x]$, mint önmaga feletti modulus?*

5. *Mely k egész számokra igaz, hogy ha adott egy k fokos szög, akkor ez harmadolható körzővel és vonalzóval?*

6. *Hány irreducibilis polinom szorzatára bontható az $x^{20} - 1$ polinom a négyelemű test fölött?*