**Matematikus szak, második évfolyam, második félév**

Részletes vizsgatematika

A szigorlatok reggel negyed kilenckor kezdődnek, helyük aznap reggel ki lesz írva a szobám melletti faliújságra (Kecskeméti u. 10–12, II. 203). Akkorra három ember jöjjön, azután fél tíztől harminc percenként egyvalaki. Egy nap maximum tíz ember vizsgázhat. Halasztani szabad, e faliújságra kitett jelentkezési lista áteditálásával, de a halasztások miatt nem lesz új vizsganap, tehát csak oda írjátok be magatokat, ahol van hely! A **konzultációk** időpontját is ide fogom írni.

A szigorlat célja annak kiderítése, hogy ki milyen szinten látja a kétéves anyag **összefüggéseit,** de egyúttal számon kérjük az negyedik féléves anyagot is. Mindenki egy tételhármast húz, amiben két összefoglaló kérdés, és egy bizonyítás szerepel; az elégségeshez mindhármat tudni kell. Az összefoglaló kérdések a négy féléves anyagból lesznek, ezek alapját a már korábban kiosztott tematikák, illetve az alább található negyedik féléves tematika képezi. A tételeket és definíciókat mind a négy féléves anyagból pontosan tudni és érteni kell. Bizonyítást csak az efélévi anyagból kérdezünk, a lehetséges bizonyítások listája alább szerepel (de egyszerű gondolatmeneteket, illusztráló és ellenpéldákat minden anyagrészben ki kell tudni találni, ismerni kell a bizonyítási módszereket, és azt is, hogy milyen tételhez milyen apparátust használunk).

A negyedik félév anyaga is az ami az előadáson (illetve részben a gyakorlaton) elhangzott. Ajánlott irodalom: Fried Ervin: *Általános algebra II* (a sárga egyetemi tankönyv), Fuchs László: *Algebra* (egyetemi jegyzet). A homepage-emről letölthető egy reprezentációelmélet jegyzet, amelynek egyes részei használhatók.

**A Galois-elmélet alkalmazásai.** Egyszerű testbővítés konstrukciója faktorgyűrűként. A felbontási test és az algebrai lezárt létezése. Az algebrai lezárt egyértelműsége. Prímtest, szerkezete. Véges testek elemszáma, létezése, egyértelműsége. Véges test multiplikatív csoportja ciklikus. Véges test véges bővítése mindig normális, a Galois-csoport ciklikus, a Galois-csoport generátoreleme, a közbülső testek száma és foka. Wedderburn tétele (minden véges ferdetest kommutatív).

Nulla karakterisztikájú test gyökökkel elérhető bővítése, a gyökkifejezés fogalma. A körosztási test foka és Galois-csoportja. Az $x^p - a$ polinom felbontási teste ($p$ prím); ha az alaptest tartalmazza a $p$-edik egységgyököket, akkor ez a bővítés első vagy $p$-edfokú. Megfordítás: ha az alaptest tartalmazza a $p$-edik egységgyököket, akkor minden $p$ fokú bővítés így kapható; Lagrange-rezolvens. A gyökökkel megoldható polinomok jellemzése a Galois-csoport feloldhatóságával. Minden egységgyök gyökkifejezés. Az $x^5 - 4x + 2$ polinom Galois-csoportja $S_5$, és így nem oldható meg gyökjelekkel. Az általános $n$-edfokú egyenlet Galois-csoportja $S_n$. Következmény: a legalább ötödfokú egyenletre nincs általános megoldóképlet.

Geometriai szerkeszthetőség. Az alapadatok által generált test. A szerkesztési lépések és a másodfokú bővítések kapcsolata. Komplex szám szerkeszthetősége. A szerkeszthető számok jellemzése: minimálpolinomjuk felbontási testének foka az alaptest felett 2-hatvány. Konkrét szerkesztési feladatok megoldhatatlansága: kockakettőzés, szögharmadolás, körnégyszögesítés. Szabályos sokszögek szerkeszthetőségének jellemzése.

Összesen két lap (négy oldal)!

**Gyűrűk.** A jobb és baloldali annullátor fogalma gyűrűben. A balideálmentes gyűrűk szerkezte. Következmény: egységelemes kommutatív gyűrű maximális ideálja szerinti faktor test. Krull tétele: egységelemes gyűrű minden valódi ideálja benne van egy maximális ideálban.

Rendezett integritási tartomány, az elrendezhetőség feltétele, formálisan valós test. A valósan zárt testek jellemzései. A kvaterniótest. Frobenius tétele valósan zárt test feletti véges dimenziós, nullosztómentes algebrákról.

**Modulusok.** A kategória fogalma, kovariáns és kontravariáns funktorok, bifunktor. Diagramm kommutativitása, egzakt, félig egzakt és rövid egzakt sorozat, egzakt funktor. A direkt szorzat kategóriaelméleti jellemzése. A Hom értelmezése modulusokon és modulusok közötti homomorfizmusokon. A Hom mint bifunktor.

Modulusok bővítésének fogalma, bővítések ekvivalenciája, a direkt szorzat, mint széteső bővítés. Abel csoportok bővítésének faktorrendszere. A széteső bővítéshez tartozó faktorrendszerek leírása, transzformációrendszer. Ekvivalens bővítések jellemzése, az Ext csoport. Hosszú egzakt sorozat létezése Abel-csoportok esetén (Cartan-Eilenberg, NB). Következmény: $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, A) \cong A/nA$.

A projektív és injektív modulus fogalma, kapcsolatuk a Hom egzaktságával és a megfelelő bővítések szétesésével. A projektívek pontosan a szabadok direkt összeadandói. Minden modulus beágyazható injektívbe. Projektív és injektív modulusok főideálgyűrű felett, az osztható Abel-csoportok struktúratétele.

Kommutatív gyűrű feletti modulusok bihomomorfizmusa és tenzorszorzata, ennek univerzális tulajdonsága. Homomorfizmusok tenzorszorzata, a tenzorszorzat mindkét változójában kovariáns bifunktor. A tenzorszorzat alaptulajdonságai (asszociativitás, kommutativitás, direkt összegek tenzorszorzata). Az alapgyűrűvel vett tenzorszorzat maga a modulus. Következmény: vektorterek tenzorszorzatának dimenziója és bázisa, mátrixok tenzorszorzata. A Hom funktor és a tenzorszorzat kapcsolata.

**Kommutatív gyűrűk.** A (kommutatív, egységelemes) Noether-gyűrű fogalma. Hilbert tétele: Noether-gyűrű feletti polinomgyűrű is Noether-féle. A prímideál és a primérideál fogalma, ideál radikálja, primér ideál radikálja prímideál. Ideálok felbontása Noether-gyűrűben metszet-irreducibilisek metszetére; itt minden metszet-irreducibilis ideál primér. Következmény: Noether-Lasker tétele. Az egyértelműség kérdése.

Egész elemek egységelemes integritási tartomány fölött. Minden algebrai elem egy egész és egy alapgyűrűbeli elem hányadosa. Minden alaptételes gyűrű egész-zárt. Az egészek jellemzése véges modulusbővítésekkel, az egészek részgyűrűt alkotnak.

Ha egy test véges sok elemmel vett gyűrűbővítése is test, akkor a bővítő elemek mindegyike algebrai. Következmény: algebrailag zárt test feletti polinomgyűrű maximális ideáljainak a leírása. Galois-kapcsolat többváltozós polinomok és gyökeik között, zárt halmazok a polinomgyűrűben, Hilbert nullhelytétele.

A Dedekind-gyűrű fogalma. A racionális test véges bővítéseiben az algebrai egészek Dedekind-gyűrűt alkotnak.

**Nemkommutatív gyűrűk.** A Schur-Lemma. Jacobson sűrűségi tétele. Egységelemes $R$ gyűrű Jacobson-radikálja, mint az egyszerű $R$-modulusok annullátorainak metszete. A Jacobson-radikál az $R$ maximális balideáljainak metszete, és azon $x$ elemek halmaza, melyekre $1 - rx$ balinvertálható minden $r$ gyűrűelemre. Következmény: a radikál minden nilpotens balideált tartalmaz. Az $1 - xr$ jobbinvertálható is, a radikál független attól, hogy balról vagy jobbról definiáljuk.

Artin-gyűrű radikálja nilpotens, és így ez a gyűrű legnagyobb nilpotens (bal)ideálja. Wedderburn-Artin-tétel: Artin-gyűrű radikál szerinti faktora véges sok, ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű direkt szorzata. A féligegyszerű Artin gyűrűk jellemzései modulusokkal: minden modulus projektív/injektív, minden részmodulus direkt összeadandó, illetve minden modulus teljesen reducibilis. Az irreducibilis modulusok száma. Modulusok algebrák felett, a radikál és a Wedderburn-Artin tétel kiterjesztése (test feletti) algebrákra.

**Reprezentációelmélet.** A csoportreprezentáció fogalma, foka és karaktere. Ekvivalens reprezentációk. A csoportalgebra, kapcsolat a csoportalgebra feletti modulusok és a reprezentációk között. Invariáns skaláris szorzat, Maschke tétele: $\mathbb{C}$ felett a csoportalgebra féligegyszerű. Az egyszerű modulusok leírása, irreducibilis reprezentációk. A csoportalgebra centruma, osztályfüggvények. Az irreducibilis reprezentációk száma a csoport konjugált elemosztályainak a száma, a fokok négyzetösszege a csoport rendje. Abel-csoport reprezentációi.

A karaktertábla, elemei algebrai egészek. A reguláris reprezentáció, karaktere, a reguláris reprezentációban minden irreducibilis reprezentáció annyiszor szerepel, amennyi a foka. A karakterek ortonormált bázist alkotnak az osztályfüggvények között. Következmény: ha a karakterek egyenlők, akkor a reprezentációk ekvivalensek.

A második ortogonalitási reláció. Karakter magja és centruma. Irreducibilis karakter foka osztója a csoport rendjének. Burnside tétele: véges nemkommutatív egyszerű csoportban nem lehet prímhatványrendű konjugált elemosztály. Következmény: ha egy csoport rendje legfeljebb két prímmel osztható, akkor a csoport feloldható.

**Hálóelmélet és univerzális algebra.** A háló definíciója rendezés illetve műveletek segítségével, a dualitási elv. Teljes háló, itt elég az egyik művelet létezését feltenni. Fedés, hálók lerajzolása. Intervallum, leszálló, konvex részhalmaz, ideál, filter. Komplementum.

Általános algebrai struktúrák, részstruktúra. Típus, homomorfizmus, kongruencia, faktor, direkt szorzat. Részalgebraháló, kongruenciaháló. A $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ operátorok, felcserélhetőségi viszonyaik.

Szubdirekt szorzat, jellemzése kongruenciákkal. Triviális szubdirekt szorzat, szubdirekt irreducibilis algebrák, jellemzésük, Birkhoff tétele a szubdirekt felbontásról. A szabad algebra általános fogalma, Birkhoff tétele a szabad algebra létezéséről.

A disztributív háló fogalma. Kongruenciák készítése, a szubdirekt irreducibilis disztributív hálók jellemzése. Stone reprezentációs tétele. A három elemmel generált szabad disztributív háló szerkezete.

A term általános fogalma, term-függvény, polinom-függvény. Az adott típusú szabad algebra mint a termek algebrája. Az azonosság fogalma, varietás. Birkhoff tétele: ezek a $\mathbf{HSP}$-re zárt osztályok.

Kongruenciák egyesítésének leírása, a kongruenciaháló a partícióháló teljes részhálója. Többségi termmel rendelkező algebrák, speciálisan a hálók kongruenciahálója disztributív. Kongruencia-felcserélhető algebrák és varietások, jellemzésük Malcev term segítségével. Ha egy kongruencia-felcserélhető varietásban egy algebra véges sok egyszerű algebra szubdirekt szorzata, akkor izomorf néhány tényező direkt szorzatával.

A moduláris háló fogalma, kongruencia-felcserélhető algebra kongruenciahálója moduláris. Az intervallumok izomorfizmus-tétele. Jordan-Dedekind tétel, a magasságfüggvény és a dimenzió-egyenlet. Metszet-irreducibilis elemek, Kuros-Ore tétel. A három elemmel generált szabad moduláris háló rajza. A négy elemmel generált szabad moduláris háló szóproblémája eldönthetetlen (Freese-Herrmann). Dedekind és Birkhoff tételei a modularitás illetve a disztributivitás tiltott részhálókkal való jellemzéséről.

A Boole algebra fogalma, azonosságai. Szubdirekt irreducibilis Boole-algebrák, Stone reprezentáció. A Boole-algebrák varietása kongruencia-felcserélhető. Következmény: a véges Boole-algebrák szerkezete. A végesen generált szabad Boole-algebrák elemszáma.

Pudlak és Tuma tétele: minden véges háló beágyazható véges partícióhálóba.

## A bizonyítások, amiket tudni kell

1. Egyszerű testbővítés konstrukciója, az algebrai lezárt létezése.
2. Véges testek létezése és egyértelműsége.
3. Véges test multiplikatív csoportja és Galois-csoportja.
4. Wedderburn tétele.
5. Ciklikus bővítések és az $x^p - a$ polinom.
6. Balideálmentes gyűrűk, Krull tétele.
7. $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, A) \cong A/nA$.
8. Hilbert bázis tétele.
9. Noether-Lasker tétel: létezés.
10. Az algebrai egészek gyűrűt alkotnak.
11. A polinomgyűrű maximális ideáljai, Hilbert nullhelytétele.
12. Jacobson sűrűségi tétele.
13. A Jacobson-radikál jellemzései.
14. Artin-gyűrű radikálja nilpotens.
15. Az első ortogonalitási reláció.
16. A szubdirekt irreducibilis algebrák jellemzése, Birkhoff felbontási tétele.
17. A termek algebrája, Birkhoff tétele a szabad algebra létezéséről.
18. Többségi term, háló kongruenciahálója disztributív.
19. Kuros-Ore tétele.