Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév
Kilencedik alkalom

1. *Melyek modulárisak a IX/1. feladatban lerajzolt hálók közül?*

2. *Mutassuk meg, hogy a moduláris hálók varietást alkotnak, ami önduális. Vezessük le a disztributív azonosságból a moduláris szabályt.*

3. *Igazoljuk, hogy komplementumos moduláris háló intervalluma is komplementumos.*

4. *Mutassuk meg, hogy moduláris hálóban nem lehet egy elemnek két különböző összehasonlítható komplementuma.*

5. *A valós projektív síkon tekintsük a pontok, és az egyenesek halmazát. Mutassuk meg, hogy ezek az üres halmazzal és az egész síkkal kiegészítve moduláris hálót alkotnak. Egyszerű ez a háló? Négy általános helyzetű pont hány elemű részhálót generál?*

6. *Mutassuk meg, hogy ha egy véges hálóban a magasságfüggvény teljesíti a dimenzióegyenlőséget, akkor a háló moduláris.*

7. *Igazoljuk, hogy az intervallum-izomorfizmus tétel csak moduláris hálóban érvényes.*

8*. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges moduláris hálóban a nullát fedő elemek (azaz az atomok) egyesítése* 1*, akkor a háló komplementumos.*

9. *Bizonyítsuk be a Jordan-Dedekind tételt.*

10. *Igazoljuk, hogy Boole-algebrában* $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ *és* $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

11. *Mutassuk meg, hogy minden szubdirekt irreducibilis Boole-algebra kételemű.*

12. *Mutassuk meg, hogy a Boole-algebrák varietása kongruencia-felcserélhető.*

13. *Határozzuk meg a végesen generált szabad Boole-algebrák elemszámát.*

14. *Adjunk struktúratételt az* $x^2 = x$ *azonossággal definiált gyűrűvarietás véges elemeire.*

15. *Igazoljuk, hogy ha a* G *csoport direkt négyzetének részcsoporthálója moduláris, akkor* G*-ben minden részcsoport normálosztó.*

16. *Legyen* F *az* $\{x, y, z\}$ *generálta szabad algebra egy* V *varietásban.*

a) *Legyen* $\varphi : F \to F$ *az az endomorfizmus, melyre* $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = x$, $\varphi(z) = z$. *Igazoljuk, hogy* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *a legszűkebb olyan kongruencia, melynél* x *és* y *kongruens.*

b) *Tegyük fel, hogy* $m \equiv z$ *ennél a kongruenciánál, és* $m = t^F(x, y, z)$ *egy* t *termre. Bizonyítsuk be, hogy* V*-ben teljesül a* $t(x, x, z) = z$ *azonosság.*

c) *Mutassuk meg, hogy ha* V *kongruencia-felcserélhető, akkor van Malcev-termje.*

17. *Bizonyítsuk be, hogy ha* A *a* B *és* C *algebrák szubdirekt szorzata egy kongruencia-felcserélhető varietásban, akkor van olyan* θ *kongruencia* B*-n, és olyan* ψ *kongruencia* C*-n, valamint egy* $\varphi : B/\theta \to C/\psi$ *izomorfizmus úgy, hogy* $A = \{(b, c) \mid \varphi(b/\theta) = c/\psi\}$.

18. *Mutassuk meg, hogy ha egy kongruencia-felcserélhető varietásban egy algebra véges sok egyszerű algebra szubdirekt szorzata, akkor izomorf néhány tényező direkt szorzatával.*

19*.** *Mutassuk meg, hogy ha egy varietásban a véges algebrák között csak véges sok direkt irreducibilis van, akkor a varietás véges algebrái kongruencia-felcserélhetőek.*