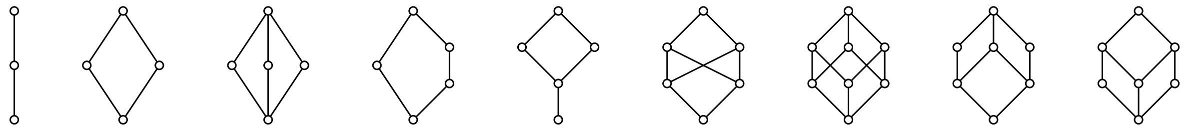
Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Nyolcadik alkalom

1. *Döntsük el az alábbi részben rendezett halmazokról, hogy hálók-e, és ha igen, akkor disztributívak-e, illetve komplementumosak-e. Amelyek hálók, azoknak rajzoljuk le a kongruenciahálóját és a részháló-hálóját. Melyek lesznek egyszerűek, illetve szubdirekt irreducibilisek? Adjuk meg a második hálónak az elsőbe menő rendezéstartó leképezéseit, és válogassuk ki ezek közül a háló-homomorfizmusokat. Mindegyik lerajzolt hálóban keressünk minimális elemszámú generátorrendszert.*



2. *Igazoljuk, hogy egy $\equiv$ ekvivalencia-reláció pontosan akkor háló-kongruencia, ha minden c-re $a \equiv b$-ből $a \vee c \equiv b \vee c$ és $a \wedge c \equiv b \wedge c$ következik. Általánosítsuk ezt tetszőleges algebrára. Mutassuk meg, hogy az egyváltozós polinomok megőrzik a kongruenciákat.*

3. *Vezessük le mindkét disztributív szabályból a másikat.*

4. *Tegyük fel, hogy I ideálja, F pedig filtere az L disztributív hálónak. Legyen $(a, b) \in \theta_I$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x \in I$, melyre $a \vee x = b \vee x$, és ψ_F a duális fogalom.*
  a) Bizonyítsuk be, hogy θ_I kongruencia, amelynek I osztálya.
  b) Igazoljuk, hogy ha $x \in I$ és $y \in F$ esetén mindig $x \leq y$, akkor $\theta_I \cap \psi_F = 0_L$.

5. *Egy háló egy ideálját prímideálnak nevezzük, ha komplementere filter. Igazoljuk, hogy disztributív hálóban minden ideál része egy prímideálnak.*

6. *Igazoljuk, hogy disztributív hálóban a komplementum, ha létezik, akkor egyértelmű.*

7. *Bizonyítsuk be, hogy minden halmaz partícióhálója komplementumos.*

8*. *Mutassuk meg, hogy a három elemmel generált szabad háló végtelen. Rajzoljuk le az x, y, z elemekkel generált, $x \vee y = y$ (azaz $x \leq y$) definiáló relációval megadott hálót.*

9**. *Bizonyítsuk be, hogy minden végesen generált disztributív háló véges. Adjunk minél jobb alsó és felső becslést az n elemmel generált disztributív háló elemszámára.*

10**. *Bizonyítsuk be, hogy minden háló kongruencia-hálója disztributív.*

11. *Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{A}$ algebrában az $a_1, \ldots, a_n$ elemek által generált részalgebra a $t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ alakú elemekből áll, ahol t befutja az adott típusú n-változós termeket.*

12. *Határozzuk meg egy modulus, illetve egy kommutatív gyűrű összes polinomját.*

13*. *Mi lesz a $\mathbb{Z}^+$ csoport illetve a $\mathbb{Z}$ gyűrű által generált varietás?*

14**. *Határozzuk meg az S_3 csoport által generált varietás szubdirekt irreducibiliseit.*

15**. *Adjuk meg a Q illetve a D_4 csoport által generált varietást véges sok azonossággal.*

16. *Igazoljuk az $\mathbf{SH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HS}(\mathcal{K})$, $\mathbf{PS}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{SP}(\mathcal{K})$, $\mathbf{PH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HP}(\mathcal{K})$ összefüggéseket.*

17. *Fogalmazzuk meg és lássuk be az általános homomorfizmus- és két izomorfizmus-tételt.*

18. *Oldjuk meg a valós együtthatós kvaterniók között az $x^2 = -1$ egyenletet.*