Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hetedik alkalom

A feladatsoron minden gyűrű egységelemes, és nem feltétlenül kommutatív. Egy modulust *teljesen reducibilisnek* nevezünk, ha irreducibilis (=egyszerű) modulusok összege. Az M modulus M_α $(\alpha \in A)$ részmodulusait akkor nevezzük *független*nek, ha összegük direkt összeg (azaz bármelyiknek a többi összegével vett metszete csak a nullából áll).

1. *Legyen az M modulus az M_α $(\alpha \in A)$ egyszerű részmodulusainak összege, és N egy részmodulusa M-nek. Mutassuk meg, hogy van olyan $B \subseteq A$, hogy M_β $(\beta \in B)$ függetlenek, és ha (direkt) összegüket K jelöli, akkor $M = N \oplus K$.*

2. *Legyen M az M_α $(\alpha \in A)$ egyszerű részmodulusainak összege. Bizonyítsuk be, hogy*
- *a) M minden része és faktora is teljesen reducibilis, és minden része direkt összeadandó;*
- *b) M minden egyszerű része illetve faktora izomorf valamelyik M_α modulussal.*

3. *Legyen R egyszerű gyűrű, melynek van egy J minimális balideálja. Igazoljuk, hogy ${}_RR$ teljesen reducibilis modulus, és minden egyszerű R-modulus izomorf ${}_RJ$–vel.*

4. *Legyen az R gyűrű k darab ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű direkt szorzata. Mutassuk meg, hogy R felett pontosan k darab nemizomorf egyszerű modulus van.*

5. *Mutassuk meg, hogy az R gyűrűre az alábbiak ekvivalensek.*
- *(1) Minden R-modulus projektív (injektív).*
- *(2) Minden R-modulus minden részmodulusa direkt összeadandó.*
- *(3) Minden R-modulus teljesen reducibilis.*
- *(4) R féligegyszerű Artin-gyűrű.*

6. *Legyen D ferdetest. Mutassuk meg, hogy a $D^{n\times n}$ centruma a dE skalármátrixokból áll, ahol $d \in Z(D)$ és E az egységmátrix.*

7. *Tegyük fel, hogy A az F algebrailag zárt (kommutatív) test feletti féligegyszerű Artin-algebra. Bizonyítsuk be, hogy a felbontásában szereplő ferdetestek mind F-fel izomorfak, és a szereplő komponensek száma (azaz az irreducibilis A-modulusok száma) $\dim_F Z(A)$.*

8. *Határozzuk meg az alábbi gyűrűk radikálját: egy főideálgyűrű egy faktorgyűrűje; a páratlan nevezőjű törtek; a 2-hatvány nevezőjű törtek; a komplex felső háromszögmátrixok.*

9. *Legyen J maximális balideálja az R gyűrűnek, és I az R/J faktormodulus annullátora.*
- *a) Igazoljuk, hogy I a legnagyobb olyan ideálja R-nek, mely része J-nek.*
- *b) Legyen $0 \neq u \in R/J$. Mutassuk meg, hogy u annullátora maximális balideál.*
- *c) Mutassuk meg, hogy I előáll az R alkalmas, maximális balideáljainak metszeteként.*
- *d) Vezessük le ebből, hogy R radikálja a maximális balideálok metszete.*

10. *Mutassuk meg, hogy a radikálban csak a nulla lehet idempotens elem.*

11. *Igazoljuk, hogy ha x eleme a radikálnak, akkor $1-x$-nek van jobbinverze is. Mutassuk meg, hogy a radikál nem függ attól, hogy bal- vagy jobboldali modulusokkal definiáljuk, és hogy féligegyszerű gyűrű esetén a bal- és jobboldali Artin-tulajdonság is ekvivalens.*

12. *Igazoljuk, hogy minden véges gyűrű kommutatív, melyben igaz az $x^n = x$ azonosság.*

13. *Igazoljuk, hogy ha egy gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.*