Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév
Hatodik alkalom

1. *Racionális szám-e* $\sqrt[127]{2} + \sqrt[298]{3+\sqrt{5}}$?

2. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\alpha \in \mathbb{C}$ *szám akkor és csak akkor algebrai egész, ha* $\mathbb{Q}$ *feletti (normált) minimálpolinomja egész együtthatós.*

3. *Határozzuk meg az* $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ *illetve a* $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ *gyűrűk algebrai egész elemeit.*

4. *Van-e olyan 1 abszolút értékű komplex szám, ami nem egységgyök, de algebrai egész?*

5***.** *Legyen az* $f(x)$ *polinom minden együtthatója algebrai egész.*
a) *Igaz-e, hogy ha* f *normált, akkor minden gyöke algebrai egész?*
b) *Igazoljuk, hogy ha* f *tetszőleges számú gyökének szorzatát megszorozzuk* f *főegyütthatójával, akkor algebrai egészet kapunk.*

6***.** *Legyen* M *egy* $n \times n$*-es komplex elemű mátrix, aminek valamelyik hatványa az egységmátrix. Mutassuk meg, hogy ha* M *nyoma egy algebrai egész* n*-szerese, akkor ez a nyom vagy nulla, vagy* M *skalármátrix.*

7***.** *Igaz-e, hogy* $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ *minden maximális ideálja véges indexű, és alkalmas* p *prímre és* $m > 0$ *egészre tartalmazza a* $(p, x_1^{p^m} - x_1, \ldots, x_n^{p^m} - x_n)$ *ideált?*

8. *Legyen* $E \subseteq X \times Y$ *páros gráf,* $A \subseteq X$ *esetén* $A^\sharp$ *azon* $y \in Y$ *elemek halmaza, melyek* A *minden elemével össze vannak kötve, és definiáljuk* $B \subseteq Y$ *esetén a* $B^\flat \subseteq X$ *halmazt analóg módon. Az* A *illetve* B *lezártja* $A^{\sharp\flat}$ *illetve* $B^{\flat\sharp}$*. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
a) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X \implies A_1^\sharp \supseteq A_2^\sharp$ *és* $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y \implies B_1^\flat \supseteq B_2^\flat$.
b) $A^{\sharp\flat\sharp} = A^\sharp$ *és* $B^{\flat\sharp\flat} = B^\flat$*, speciálisan* $A^{\sharp\flat}$ *és* $B^{\flat\sharp}$ *már zártak.*
c) *Az* X *illetve az* Y *zárt részhalmazai egymással kölcsönösen egyértelmű, rendezésfordító megfeleltetésben állnak. (Az ilyen megfeleltetést Galois-kapcsolatnak nevezzük.)*

9. *Bizonyítsuk be, hogy a lineáris függésre, függetlenségre és dimenzióra vonatkozó tételek érvényben maradnak ferdetest fölött is.*

10. *Legyen* V *véges dimenziós vektortér egy ferdetest fölött, és* $R = \mathrm{Hom}(V)$*. Húzzunk élt* $v \in V$ *és* $A \in R$ *között pontosan akkor, ha* $Av = 0$*. Bizonyítsuk be, hogy a kapott Galois-kapcsolatban a zárt halmazok pontosan az alterek, illetve a balideálok.*

11. *Legyen* T *ferdetest,* $V = T^n$ *(mint baloldali vektortér* T *fölött), és* $R = T^{n\times n}$ *a teljes mátrixgyűrű. Bizonyítsuk be, hogy* R *balideáljai és* V *alterei között kölcsönösen egyértelmű, rendezéstartó megfeleltetés a következő: egy altérhez azoknak a mátrixoknak a halmaza tartozik, amelyek minden sora az adott altérnek eleme. Mutassuk meg az analóg állítást jobbideálokra/oszlopokra.*

12. *Legyen* R *egységelemes gyűrű. Mutassuk meg, hogy az* $R^{n\times n}$ *teljes mátrixgyűrű ideáljai pontosan az* $I^{n\times n}$ *gyűrűk, ahol* I *ideálja* R*-nek. Speciálisan ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű egyszerű gyűrű.*

13. *Legyenek* $M_1, \ldots, M_k$ *maximális ideálok egy egységelemes, nem feltétlenül kommutatív* R *gyűrűben. Bizonyítsuk be, hogy* $R/(M_1 \cap \cdots \cap M_k)$ *izomorf az* R/M_i *gyűrűk közül néhánynak a direkt szorzatával. Keressük meg az állítás csoportelméleti analogonját.*