Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Ötödik alkalom

1. *Igazoljuk, hogy ha R kommutatív egységelemes gyűrű, és $R[x]$ Noether, akkor R is az.*

2. *Igazoljuk, hogy ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor*

a) $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_m) = (\ldots, a_i b_j, \ldots)$;

b) *a P ideál akkor és csak akkor prímideál, ha tetszőleges A és B ideálokra $AB \subseteq P$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq P$ vagy $B \subseteq P$;*

c) *tetszőleges ideál radikálja is ideál;*

d) *ha R főideálgyűrű, akkor P pontosan akkor prímideál, ha a generátora prím, és pontosan akkor primér, ha a generátora egy prímhatvány.*

3. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű $I = (x^2, xy)$ ideálja nem primér, de tetszőleges p és q polinomokra igaz, hogy ha $pq \in I$, akkor p és q valamelyike belehatványozható I-be, és hogy az I radikálja prímideál. Melyik ideál ez a radikál?*

4. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű (x^2, y) ideálja primér, de nem hatványa a saját radikáljának.*

5. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}[x, y, z]$ gyűrű (xy, z) ideálja nem állítható elő primér ideálok szorzataként. Állítsuk elő primér ideálok metszeteként.*

6. *Állítsuk elő a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű alábbi ideáljait primér ideálok metszeteként, és a felbontás tényezőinek adjuk meg a radikálját is: (xy), (xy^2), (x^2, xy), $(x^2 + y^2)$, (x^2, y^2), (x^2, y^3), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3), (x^3, x^2y^2, xy^3).*

7. *Legyen R egységelemes, kommutatív Noether-gyűrű. Igazoljuk az alábbi állításokat.*

a) *Minden primér ideál tartalmazza a radikáljának egy hatványát.*

b) *Ha Q_i véges sok primér ideál, melyek mindegyikének a radikálja ugyanaz a P prímideál, akkor a Q_i ideálok metszete is primér, és a metszet radikálja szintén P.*

c) *Ha Q_i véges sok primér ideál, melyek radikáljai páronként különbözők, akkor a Q_i ideálok metszete, ha rövidíthetetlen, akkor nem primér.*

8*. *Bizonyítsuk be, hogy ha az R kommutatív, egységelemes gyűrű minden prímideálja főideál, akkor R minden ideálja főideál.*

9*. *Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes, kommutatív gyűrű pontosan akkor Noether, ha minden prímideálja végesen generált.*

---

10. *Igazoljuk, hogy ha egy gyűrűben az $xa = b$ egyenlet egyértelműen megoldható minden $a \neq 0$ és b elemekre, akkor ez ferdetest.*

11. *Legyenek V és W vektorterek. Mutassuk meg, hogy az $U \otimes V$ vektortér egy $\sum u_i \otimes v_i$ eleme akkor és csak akkor nem írható fel kevesebb számú tenzor összegeként, ha mind az $\{u_i\}$, mind a $\{v_i\}$ független rendszert alkotnak. Vessük össze ezt az állítást a minimális diádfelbontások jellemzéséről szóló tétellel.*

12. *Legyenek $A : U \to V$ és $B : W \to Z$ vektorterek közötti lineáris leképezések, az A mátrixa az $\{a_i\}, \{b_j\}$ bázisban M, a B mátrixa a $\{c_k\}, \{d_\ell\}$ bázisban N. Számítsuk ki az $A \otimes B$ lineáris leképezés mátrixát az $\{a_i \otimes c_k\}, \{b_j \otimes d_\ell\}$ bázisban. (Az eredményt a két mátrix tenzorszorzatának, vagy Kronecker-szorzatának nevezzük.)*