Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév
Negyedik alkalom

1. *Számítsuk ki:* $\mathbb{Z}_n^+ \otimes \mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}_n^+ \otimes \mathbb{Z}_m^+$; $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Z}_n^+$; $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_n^+$; $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Igaz-e:
  a) *Osztható csoportnak bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata osztható.*
  b) *Torziócsoport bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata torziócsoport.*
  c) *Osztható csoportnak bármely torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.*
  d) *Két szabad Abel-csoport tenzorszorzata is szabad.*
  e) *Ha* A *tetszőleges Abel-csoport, akkor* $\mathbb{Z}_n^+ \otimes A \cong A/nA$.

2. *A III/***2.** *feladatban számítsuk ki az* $A \otimes \varphi$ *leképezéseket is.*

3. *Legyen* R *kommutatív egységelemes gyűrű és* A, B, C, D *baloldali unitér* R*-modulusok. Melyek igazak az alábbi izomorfizmusok közül?*
  a) ${}_R R \otimes A \cong A$.
  b) $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D)$.
  c) $(A \times B) \otimes C \cong (A \otimes C) \times (B \otimes C)$.
  d) $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$.

4. *Legyen* V *a sík, mint* $\mathbb{R}$ *feletti vektortér. Írjuk fel* $V \otimes V$ *alábbi elemeit a lehető legrövidebb alakban (azaz minél kevesebb tenzor összegeként).*
  a) $(1, 0) \otimes (2, 4) + (2, 0) \otimes (2, 4) + (3, 0) \otimes (1, 2)$.
  b) $(1, 0) \otimes (1, 0) + (1, 0) \otimes (0, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0) + (0, 1) \otimes (0, 1)$.
  c) $(1, 0) \otimes (2, 2) + (1, 2) \otimes (2, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0)$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*
  a) *projektív (injektív) modulus direkt összeadandója is az;*
  b) *injektív modulusok direkt szorzata is az, és ennek a duálisát;*
  c) *kommutatív gyűrű felett projektív modulusok tenzorszorzata is az;*
  d) *főideálgyűrű fölött projektív* $\Longleftrightarrow$ *szabad és injektív* $\Longleftrightarrow$ *osztható.*

6. *Határozzuk meg a véges injektív és projektív modulusokat* $\mathbb{Z}_n$ *fölött.*

7. *Ha* A, B, C, D *Abel-csoportok,* $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ *és* $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$, *akkor* $\alpha \otimes \beta$ *kétféleképpen értelmezhető: mint leképezések tenzorszorzata, és mint a* $\mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D)$ *egy eleme. Igazoljuk, hogy van olyan* $\Psi : \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D) \to \mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D)$ *homomorfizmus, ami a második értelmezéshez az elsőt rendeli, de* Ψ *általában se nem injektív, se nem szürjektív. (Ötlet: Tekintsük az* $\alpha : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2}$ *beágyazást.)*

8. *Legyen* R *kommutatív egységelemes gyűrű,* $A \leq B$ *és* $C \leq D$ *baloldali unitér* R*-modulusok. Jelölje* U *az* $a \otimes c$ *alakú elemek által generált részcsoportot* $B \otimes D$*-ben, ahol* a *befutja* A*-t és* c *befutja* C*-t.*
  a) *Mutassuk meg, hogy* U *homomorf képe* $A \otimes C$*-nek.*
  b) *Igaz-e, hogy* $B/A \otimes D/C \cong (B \otimes D)/U$?
  c) *Igaz-e, hogy* U *és* $A \otimes C$ *izomorfak?*
  d) *Igaz-e, hogy* U *és* $A \otimes C$ *izomorfak, ha* R *test?*

9.** *Mutassuk meg, hogy minden modulus beágyazható injektív modulusba. Segédállítás: ha* A *osztható Abel-csoport, akkor* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ *injektív* R*-modulus.*