Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Tizedik alkalom

Az alábbiakban G véges csoportot jelöl.

1. *Bontsuk fel a* $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2]$, $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2^2]$, $\mathbb{C}[Q]$, $\mathbb{R}[Q]$, $\mathbb{C}[D_4]$, $\mathbb{C}[S_3]$ *csoportalgebrákat a Wedderburn-Artin tétel szerint* (Q *a nyolcelemű kvaterniócsoport).*

2. *Adjuk meg a* D_n *diédercsoport egy másodfokú irreducibilis karakterét.*

3. *Legyen* $\chi = m_1\chi_1 + \cdots + m_k\chi_k$ *a* χ *karakter felbontása irreducibilisek összegére. Bizonyítsuk be, hogy* $\operatorname{Ker}(\chi) = \bigcap\{\operatorname{Ker}(\chi_i) \mid m_i > 0\}$.

4. *Legyen* $N \triangleleft G$, *igazoljuk a következőket. A* G/N *reprezentációi kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak a* G *azon reprezentációival, melyek magja* N*-et tartalmazza. Irreducibilis reprezentációk egymásnak felelnek meg. Ha* $\hat{\chi}$ *karaktere* G/N*-nek, akkor az ennek megfelelő* G*-karakter* $\chi(g) = \hat{\chi}(gN)$. *Megfordítva, ha* $N \subseteq \operatorname{Ker}(\chi)$, *akkor* χ *konstans az* N *mellékosztályain, és a* $\hat{\chi}(gN) = \chi(g)$ *képlet a faktorcsoport karakterét értelmezi. Továbbá*

a) $N = \bigcap\{\operatorname{Ker}(\chi_i) \mid N \subseteq \operatorname{Ker}(\chi_i)\}$.

b) $|G : N| = \sum\{n_i^2 \mid N \subseteq \operatorname{Ker}(\chi_i)\}$.

5. *Legyen* $N \triangleleft G$ *és tegyük fel, hogy* N *nem része a* χ_i *irreducibilis karakter magjának. Igazoljuk, hogy* $\sum_{g\in N} \chi_i(g) = 0$.

6. *Igazoljuk, hogy* G *lineáris karaktereinek száma* $|G : G'|$, *magjaik metszete pedig* G'.

7. *Legyen* χ *karaktere* $G-$*nek,* $n = \chi(1)$ *ennek foka, és* $Z = Z(\chi)$. *Igazoljuk, hogy*

a) $Z/\operatorname{Ker}(\chi) \subseteq Z(G/\operatorname{Ker}(\chi))$, *és ha* χ *irreducibilis, egyenlőség áll;*

b) $Z(G) = \bigcap\{Z(\chi_i) \mid 1 \le i \le k\}$.

8. *Írjuk fel a* $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2^2$, S_3, D_4, Q, A_4, S_4, D_6 *csoportok karaktertábláját.*

9*. *Igazoljuk, hogy minden véges Abel-csoport izomorf a karaktercsoportjával.*

10. *Mutassuk meg, hogy ha* $g \in G$ *másodrendű elem, akkor minden* χ *karakterre* $\chi(g)$ *egész szám, sőt* $\chi(g) - \chi(1)$ *páros.*

11. *Mutassuk meg, hogy ha* G *véges csoport, akkor a* $g \in G$ *elem akkor és csak akkor konjugált az inverzével, ha minden* χ *karakterre* $\chi(g)$ *valós (és ilyenkor* $|G|$ *páros).*

12. *Igazoljuk, hogy* $\chi(1)^2 \le |G : Z(\chi)|$ *teljesül a* G *minden irreducibilis* χ *karakterére.*

13*. *Legyen* A *Abel-féle részcsoport a* G *véges csoportban, és tegyük fel, hogy* G*-nek van olyan irreducibilis karaktere, melynek foka* A *indexe. Mutassuk meg, hogy* G*-ben van nemtriviális Abel-féle normálosztó.*

14*. *Bizonyítsuk be, hogy minden nemlineáris, irreducibilis karakter felveszi a 0 értéket.*

15*. *Legyen* G *egyszerű csoport, melynek rendjét osztja egy* p *prím négyzete. Igazoljuk, hogy* G*-nek nem lehet* p *fokú irreducibilis karaktere.*

16. *Legyen* A *prímhatványindexű, kommutatív részcsoport* G*-ben. Igazoljuk, hogy* G *nem lehet nemkommutatív egyszerű csoport.*

17*. *Igazoljuk, hogy ha* $|G|$ *páratlan, akkor* G *egyetlen valós, irreducibilis karaktere a* χ_1 *főkarakter.*