Matematikus szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi (2001. dec. 20) — megoldásvázlatok

1. Ez az origó körüli -90 fokos forgatás mátrixa, tehát a $-45°$-os forgatás mátrixa megfelelő lesz. Ez

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Beszorzással ellenőrizhető az eredmény.

2. A mátrix determinánsa $1-b$ (2 pont). Az kell, hogy ez nulla legyen $\mathbb{Z}_5$ fölött, de ne legyen nulla, ez teljesül például, ha $b=6$ (2 pont). Ekkor az inverz

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -27 & 11 & -1 \\ 15 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 pont).}$$

3. Az f permutáció csak $(abc)(de)$ alakú lehet (1 pont). A felcserélhetőségből kapjuk, hogy $(12)(f(1)) = f(2)$. Mivel $f(1) \neq f(2)$, de (12) csak két pontot mozdít meg, ezért $f(1)$ csak 1 vagy 2 lehet. De f-nek nincs fixpontja, ezért $f(1)=2$ és $f(2)=1$ (3 pont). Tehát $\{a,b,c\} = \{3,4,5\}$, és így $f=(12)(345)$ vagy $(12)(354)$, és mindkettő jó (2 pont).

4. $\mathbb{Z}_3$ felett az 1 gyök (1 pont), például Hornerrel $(x^3+2x+2)(x+2)$ adódik (1 pont). Itt az első tényező irreducibilis $\mathbb{Z}_3$ fölött, mert harmadfokú, és nincs gyöke (1 pont). A racionális gyökteszt miatt (1 pont) az eredeti polinom csak két másodfokú szorzatára bomolhatna $\mathbb{Z}[x]$-ben (1 pont). De akkor lenne másodfokú tényezője $\mathbb{Z}_3$ felett is, ami ellentmond a $\mathbb{Z}_3[x]$-beli alaptételnek (1 pont). Tehát a polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

5. Ez a determináns az x^3+1 és x^7+1 polinomok rezultánsa (4 pont). E két polinomnak a -1 közös gyöke, tehát az eredmény nulla (2 pont). *Második megoldás:* Meg lehet mutatni, hogy csak két nem nulla kifejtési tag van (ehhez használni kell, hogy $(3,7)=1$), amelyek előjele ellentétes.

6. Akkor és csak akkor, ha n osztható néggyel. Ilyenkor az V-VI/21. feladatot alkalmazva $m=n/2$-re azt kapjuk, hogy Φ_n polinomja x^2-nek (3 pont). Megfordítva, ha Φ_n-ben csak páros fokú tagok vannak, akkor $\Phi_n(-x) = \Phi_n(x)$. Az V-VI/18. feladat miatt tehát n sem páratlan, sem egy páratlan szám kétszerese nem lehet (3 pont). A hivatkozások helyett közvetlenül is számolhatunk: a gyökök ellentettjeinek rendjeit kell megállapítani.