Matematikus szak, első évfolyam, első félév
Első zárthelyi (2001. nov. 8) — megoldásvázlatok

1. A z helyébe $x+yi$-t írva, a műveleteket elvégezve, majd négyzetre emelve és átrendezve $x^2+1=2y$ adódik (4 pont). Azonban mivel $\mathrm{Im}(\overline{z})=-y$ valaminek az abszolút értéke, ezért nemnegatív. Így semmilyen komplex szám sem megoldás (2 pont). (Közvetlen rajzolással is be lehet látni, hogy nincs megoldás.)

2. A polinomot deriválva $2001(x^{2000}-x^2)$ adódik, ennek keressük az eredeti polinommal közös gyökeit. Ha x ilyen, akkor $x^{2001}=x^3$, ezt az eredeti polinomba visszahelyettesítve $x^3=-1$ adódik (3 pont). Megfordítva, ha $x^3=-1$, akkor x nyilván gyöke az eredeti polinomnak és a deriváltnak is (1 pont). Tehát a többszörös gyökök a -1 köbgyökei, azaz a 60° és -60° szögű 1 hosszú számok, valamint a -1 (2 pont).

3. A nyolccal osztható n számok a jók. Valóban, ε szöge 360°-nak k/n-szerese, ahol $(k,n)=1$. Ezért $i\varepsilon$ szöge 360°-nak $(4k+n)/4n$-szerese (2 pont). E tört nevezője n kell hogy legyen (az egyszerűsítés után). Ezért $4\mid n$ (1 pont). Így k páratlan, tehát $n/4$ páros (különben a törtet kettővel tovább lehetne egyszerűsíteni), vagyis $8\mid n$ (2 pont). Könnyen láthatóan páratlan prímmel $(k,n)=1$ miatt nem lehet egyszerűsíteni, tehát az ilyen n számok jók (1 pont).

4. Az alaptétel bizonyításában tanult eljárást alkalmazzuk. Az első lépésben σ_2^2-t kell levonni, ekkor $-6\sigma_4-2\sum\varepsilon_j^2\varepsilon_k\varepsilon_\ell$ adódik (2 pont). A következő lépésben ehhez $2\sigma_1\sigma_3$-at kell hozzáadni. Végeredményben a keresett összeg $\sigma_2^2+2\sigma_4-2\sigma_1\sigma_3$ (2 pont). A megfelelő együtthatókat az $x^{24}-1$ polinomról leolvasva kapjuk, hogy az eredmény 0 (2 pont). *Másik megoldási ötlet:* Kiindulhatunk az s_2^2-ből is, majd s_4-et a Newton-formulákból megkaphatjuk. *Harmadik megoldási ötlet:* Be lehet látni, hogy az $\varepsilon_j\varepsilon_k$ szorzatok a 24-ik egységgyököket futják be. Így egy mértani sort kapunk.

5. A racionális gyökteszt szerint próbálgatva látjuk, hogy -3 gyöke a polinomnak, az $x+3$ gyöktényezőt kiemelve $x^4+4x^3+6x^2+x+1$ marad (2 pont). Ide x helyébe $x-1$-et írva x^4-3x+3 adódik, ami a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis (4 pont).

6. Jogosan: nincs ilyen polinom. Ehhez elég belátni, hogy ha f századfokú, és minden egész helyen egész értéket vesz fel, akkor $(100!)^2f$ már egész együtthatós (a papíron szereplő polinom $(100!)^2$-szerese biztosan nem egész együtthatós, hiszen 101 prímszám). Az f polinomot az azonossági tétel miatt egyértelműen meghatározza a $0,1,\ldots,100$ helyeken felvett helyettesítési értéke. Ha kiszámoljuk a megfelelő Lagrange-féle interpolációs polinomot, akkor azonnal látszik, hogy a keletkező nevezők mindegyike osztója $(100!)^2$-nek. (Valójában már 100!-nak is osztója minden nevező.)